CentraleSupélec

Juin 2018

Épreuve écrite de Physique

2 heures

Chacun des exercices sera rédigé sur une copie différente. Chacune des copies fera impérativement apparaître le numéro de candidat. Les quatre copies devront être rendues même si un ou plusieurs exercices n'ont pas été traités.
Les calculatrices sont interdites.

1 Reboucher une bouteille de champagne

Introduction

On considère une bouteille de champagne fermée par un piston diathermane (qui laisse passer la chaleur) de surface $S = 2{,}5\,\mathrm{cm}^2$ et de masse $m = 10\,\mathrm{g}$; initialement bloqué et inséré dans un tube prolongeant le goulot de la bouteille. Pour simplifier les calculs, on considèrera que la bouteille renferme un litre de champagne ainsi qu'un volume $V_1 = 5\,\mathrm{cm}^3$ de gaz que l'on suppose être uniquement composé de CO_2. On considèrera le CO_2 comme un gaz parfait avec $\gamma = C_p/C_v = 7/5$ constant. On rappelle que : $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$.

La bouteille est placée dans un frigo à la température $T_1 = 4°C$. L'état initial du gaz est donc $E_1 = (T_1, P_1, V_1)$. Après fermentation, la concentration en CO_2 dissout dans le champagne est c_{CO_2}. On prendra : $c_{CO_2} = 10\,\mathrm{g.L^{-1}}$ dans le champagne à T_1 et P_1, $c_{CO_2} = 3\,\mathrm{g.L^{-1}}$ à T_1 et sous 1 atmosphère ($P_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$), $R = 8{,}31\,\mathrm{J.K^{-1}.mol^{-1}}$ (on prendra $R.T_1 = 2302\,\mathrm{J.mol^{-1}}$).

La loi de Henry donne la pression d'un gaz en fonction de sa fraction molaire dissoute. Cette loi est valide si la fraction molaire du gaz dissout est inférieure à 3% et s'écrit : $P = H.c_{CO_2}$ avec P la pression, c_{CO_2} la concentration de gaz dissout et $H = 0{,}4\,\mathrm{bar.g^{-1}.L}$, le coefficient de Henry.

Q. 1.1 *On considère que l'on part d'un litre d'eau pure et que la fermentation ne change pas le volume. On donne les masses molaires suivantes :* $M_{CO_2} = 44\,\mathrm{g.mol^{-1}}$, $M_{H_2O} = 18\,\mathrm{g.mol^{-1}}$. *Vérifier que la loi de Henry s'applique ici, en assimilant le champagne à de l'eau pure.*

Q. 1.2 *Déterminer la pression* P_1 *du* CO_2 *en bar et en Pascal dans le volume* V_1 *avec la loi de Henry.*

On assimile le goulot de la bouteille, qui accueille le volume V_1, à un cylindre de hauteur $h = 1,6\,\text{cm}$ et de rayon $r = 1\,\text{cm}$.

Q. 1.3 *Calculer le module de la force exercée par le gaz sur la paroi du goulot.*

Q. 1.4 *Déterminer la capacité calorifique molaire* C_v *en fonction de* R.

Le bouchon saute

On libère brusquement le piston. On négligera les frottements du piston le long du tube.

Dans un premier temps, on considère que la détente est suffisamment rapide pour que les échanges de chaleur soient négligeables, et également que le CO_2 dissout n'a pas le temps de repasser en phase gazeuse. On note V_2 et T_2 le volume et la température du gaz dans ce nouvel état atteint grâce à des phénomènes dissipatifs internes.

Q. 1.5 *Déterminer le travail fourni par les forces extérieures.*

Q. 1.6 *Déterminer l'expression de* V_2/V_1 *et* T_2/T_1 *uniquement en fonction de* P_0 *et* P_1 *et* γ.

Dans un second temps de la chaleur a pu s'échanger avec l'extérieur.

Q. 1.7 *Montrer que la variation d'entropie entre ces deux états est* $\triangle_{1\to 2}S = n.C_v.\ln\left(\frac{P_2.V_2^\gamma}{P_1.V_1^\gamma}\right)$.

Q. 1.8 *L'estimer numériquement, on donne* $(22/7)^{7/5} = 5$ *et* $\ln(1,25) = 0,2$ *ainsi que* $(11/4)^{7/5} = 0,71$ *et* $\ln(1,4) = 0,34$.

Q. 1.9 *La transformation est-elle réversible ? Justifier en utilisant un bilan.*

Refermer la bouteille de champagne

On laisse le gaz se thermaliser et ainsi retrouver la température T_1. On redescend ensuite infiniment lentement le piston jusqu'à sa position initiale, correspondant à l'état $E_1' = \left(T_1', P_1', V_1'\right)$.

Q. 1.10 *Est-il possible que cet état puisse être identique à* E_1 *?*

Q. 1.11 *Déterminer les caractéristiques* T_1', P_1', V_1' *de cet état* E_1'.

2 Modélisation d'une corde de guitare

Dynamique d'un ressort en une dimension

Soit un ressort de longueur X_0 au repos, c'est-à-dire quand aucune force ne lui est appliqué, disposé selon un axe $\hat{x}$, on suppose son extrémité gauche fixe. L'extrémité de droite est libre d'être déplacé d'une distance X (Figure 1). Lorsque l'on change la longueur du ressort, soit en le poussant, soit en le tirant, et si on néglige sa masse et les frottements, la force exercée *par le ressort*, appelée force de rappel, est donnée par $\overrightarrow{F} = -k\,(X - X_0)\,\hat{x}$, ou k est appelée constante de raideur.

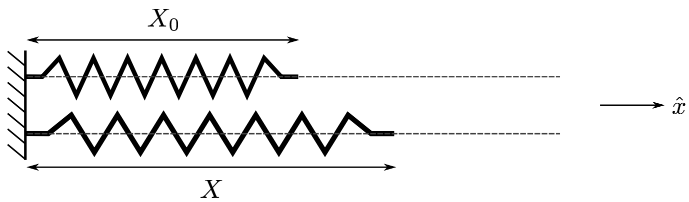


Figure 1: Déplacement de l'extrémité libre d'un ressort.

Q. 2.1 *Interpréter le signe de la force suivant si* X *est plus petit ou plus grand que* X_0.

Q. 2.2 *Donner la signification physique de la constante de raideur* k *et son unité dans le système international.*

On fait coïncider l'extrémité de droite, qui est libre, avec le point $x = 0$ au repos et on y attache une masse m supposée ponctuelle et astreinte à se déplacer uniquement selon l'axe $\hat{x}$ (on néglige donc son poids).

Q. 2.3 *Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la masse* m *et montrer que l'on aboutit à l'équation* $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Q. 2.4 *Donner l'expression et l'unité de* ω.

On déplace la masse m jusqu'à la position $x^\star$. À l'instant $t = 0$, on lâche la masse sans vitesse initiale.

Q. 2.5 *Vérifier que* $x = A\cos\left(\omega t + \phi\right)$, *où* A *et* ϕ *sont des constantes, est solution de l'équation différentielle précédente.*

Q. 2.6 *Déterminer les constantes* A *et* ϕ *à l'aide des conditions initiales.*

Application à la corde de guitare

On modélise une corde de guitare, par une masse ponctuelle m égale à la masse totale de la corde, retenue par deux ressorts de même raideur k et de même longueur à vide $l_0 = 49\,\mathrm{cm}$ (Figure 2). L'axe $\hat{x}$ est celui du manche, supposé parallèle au sol. On définit l'axe $\hat{y}$ selon la verticale. La longueur totale de la corde à l'équilibre est $2 \times \mathrm{L} = 1\,\mathrm{m}$ avec $\mathrm{L} > l_0$ (Figure 3).

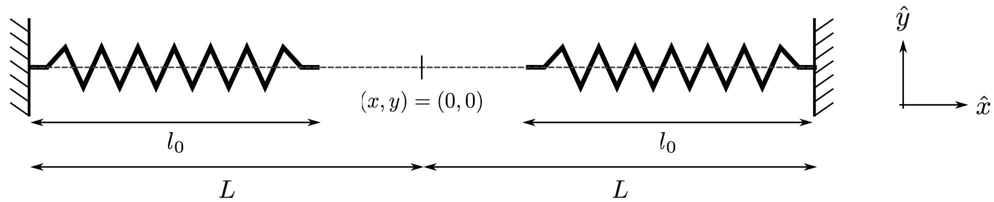


Figure 2: Ressorts à vide.

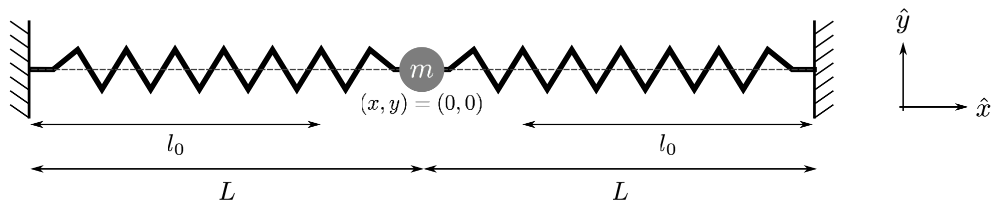


Figure 3: Ressorts en tension.

Q. 2.7 *Au repos, le fait de tendre un ressort de* l_0 *jusqu'à* L *créé une force équivalente au poids d'une masse* $\mathrm{M} = 10\,\mathrm{kg}$. *Déterminer la constante de raideur* k.

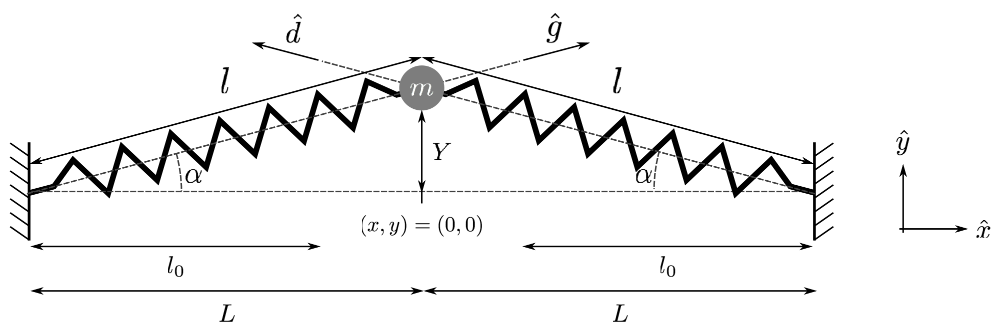


Figure 4: Excitation du système.

On met la corde en mouvement en imposant un déplacement initial Y à la masse m selon la verticale, on note l la longueur totale de chacun des ressorts, et α l'angle formé entre les ressorts et l'horizontale (Figure 4). On notera $\triangle l = l - l_0$.

Q. 2.8 *Donner l'expression forces* $\overrightarrow{\mathrm{F}}_g$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{F}}_d$ *selon chacun des vecteurs unitaires* $\hat{g}$ *et* $\hat{d}$.

Q. 2.9 *Appliquer le principe fondamental de la dynamique et décrire le mouvement de m selon l'axe* $\hat{x}$*.*

Q. 2.10 *Appliquer le principe fondamental de la dynamique selon l'axe* $\hat{y}$ *et donner l'expression de* $\ddot{y}$*.*

Q. 2.11 *Montrer que* $\frac{\triangle l}{l} = 1 - \frac{l_0}{\sqrt{L^2+y^2}}$.

Q. 2.12 *On souhaite se placer dans l'approximation des petits angles. Donner une condition, que l'on évaluera numériquement, sur* Y *pour que cette approximation soit valable. Commenter la plausibilité de cette situation.*

Q. 2.13 *La masse linéïque de la corde est* $\mu = 4.10^{-4}\,\mathrm{kg.m^{-1}}$. *En déduire que le poids de la corde est négligeable dans l'équation du mouvement.*

Q. 2.14 *Montrer qu'avec ces deux approximations on aboutit à l'équation :* $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$. *On précisera* ω_0.

Q. 2.15 *Donner une valeur numérique pour la pulsation* ω_0 *et la fréquence* ν_0.

3 Voile de nuit

Lorsque de nuit, on observe la lumière d'un réverbère à travers un voilage léger, plutôt que d'observer une tache circulaire, on observe une série de points répartis selon une croix. Afin de simplifier la modélisation de la scène représentée sur la gauche de la figure 5, on se place en une dimension, on supposera que le voilage est fait de fils opaques espacés d'une distance d (voir figure 5, droite). On suppose que le réverbère et l'observateur sont placés à une distance suffisamment grande du voilage, chacun de leur côté, pour pouvoir considérer que tous les rayons viennent avec le même angle.

On appelle θ_i l'angle avec lequel les rayons du réverbère arrivent sur le voilage, et θ_d celui avec lequel ils sont diffractés vers l'observateur. On suppose que l'éclairage a une longueur d'onde λ.

Q. 3.1 *Exprimer les différences de chemins optiques* δ_1 *et* δ_2 *entre deux rayons passant entre deux fils successifs, en fonction de* θ_i, θ_d, d.

Q. 3.2 *En déduire le déphasage entre ces deux rayons et donner une condition pour qu'ils interfèrent constructivement à l'infini. Démonter ainsi la formule des réseaux :* $\sin\theta_d = \sin\theta_i + p\frac{\lambda}{d}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$.

On suppose que le réverbère et l'observateur sont alignés selon un axe orthogonal au voilage (l'axe $\hat{z}$ en l'occurrence), de telle façon que les rayons issus du réverbère arrivent à incidence normale sur le voilage. Cette condition, ajoutée à celle des grandes distances permet de faire l'approximation des petits angles.

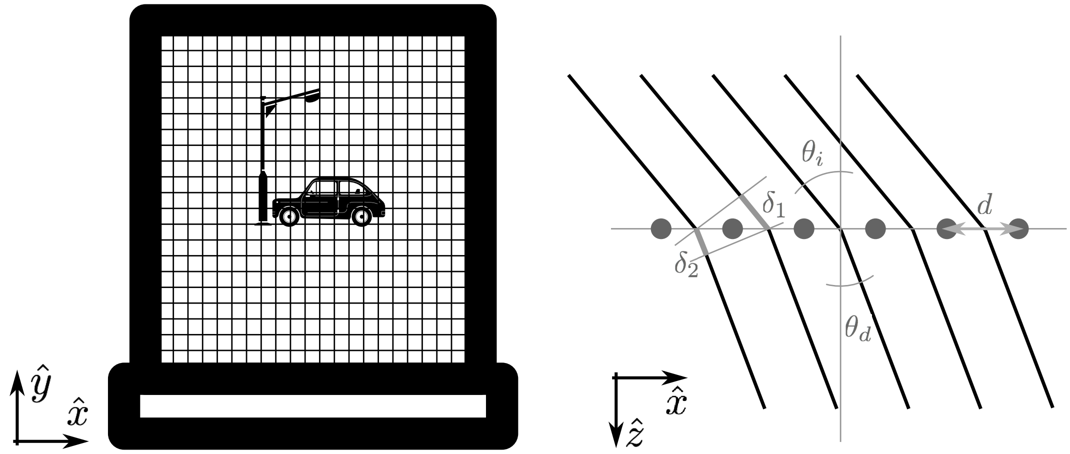


Figure 5: Gauche : scène observée. Droite : modélisation en une dimension du trajet des rayons lumineux à travers le voilage.

Q. 3.3 *Montrer que cela conduit à des angles* θ_d^p *pour lesquels se forment des taches lorsque les rayons interfèrent constructivement, tels que* $\theta_d^p = p\frac{\lambda}{d}$ *avec* $p \in \mathbb{Z}$.

La taille finie de la source fait que l'on observe seulement cinq taches, autrement dit $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

On modélise l'œil de l'observateur par une lentille simple (correspondant à la cornée) de distance focale $f = 2\,\text{cm}$, permettant de former une image sur la rétine placée à son foyer (Figure 6). L'approximation des petits angles permet de considérer que la rétine est plane.

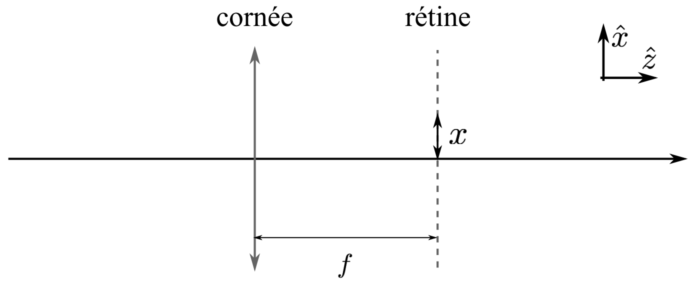


Figure 6: Schéma de l'œil.

Q. 3.4 *Calculer les abscisses* x_p *où se forment les taches sur la rétine.*

La connaissance d'une des valeurs de x^p, c'est-à-dire de l'un des angles θ_d^p, permettrait de remonter à la distance d entre les fils du voilage. Cependant, dans la réalité, il est difficile de mesurer des distances sur une rétine. Il faut procéder par comparaison. Pour cela, une voiture de longueur $l = 2,4\,\text{m}$ se trouve opportunément sous le réverbère et centrée sur lui. L'ensemble est placé à une distance $\text{L} = 20\,\text{m}$ de l'observateur.

L'observateur adapte légèrement sa distance afin que les taches $p = \pm 2$ se superposent à l'image des extrémités de la voiture. On suppose un réverbère classique fonctionnant avec une lampe à sodium de longueur d'onde $\lambda = 600\,\text{nm}$.

Q. 3.5 *Donner une valeur numérique de* θ_2 *et en déduire la distance entre les fils du voilage* d.

On tente de reproduire la même expérience le lendemain. Cependant, la lampe à sodium a été remplacée par une diode électroluminescente (LED) blanche émettant de $\lambda_{\text{min.}} = 400\,\text{nm}$ à $\lambda_{\text{max.}} = 800\,\text{nm}$.

Q. 3.6 *Estimer les angles* $\theta_d^p\big|_{\text{min.}}$ *et* $\theta_d^p\big|_{\text{max.}}$ *pour* $p = 1$ *et* 2 *et conclure.*

Juin 2019

Épreuve écrite de Physique

2 heures

Chacun des exercices sera rédigé sur une copie différente. Chacune des copies fera impérativement apparaître le numéro de candidat. Les quatre copies devront être rendues même si un ou plusieurs exercices n'ont pas été traités.

Les calculatrices sont interdites.

Les ondes radio sont des ondes électromagnétiques dont la fréquence est inférieure à 300 GHz. Cette gamme de fréquences étant particulièrement propice à la transmission de l'information sur de longues distances, elle est employée pour un grand nombre d'applications telles que : la téléphonie mobile, les radars, la navigation aérienne, la radio AM/FM, la télévision, les communications satellites, etc. Étant donné la criticité de ces technologies, l'usage de ces fréquences est fortement réglementé. Seule une étroite plage de fréquences, autour de 2,4 GHz peut être utilisée librement pour des applications industrielles, scientifiques, médicales ou domestiques. C'est donc à cette fréquence que fonctionnent notamment le WiFi et les fours à micro-ondes.

Dans une première partie on s'intéressera aux propriétés générales de ces ondes, avant d'aborder les applications au four à micro-ondes et au Wifi, dans les parties deux et trois respectivement.

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment.

1 Généralités

On décrira la propagation de ces ondes par la seule donnée de leur champ électrique. De plus, l'approximation scalaire permet, sous certaines conditions ici respectées, de négliger la nature vectoriel des champs. On supposera donc que les ondes ont un champ électrique de la forme : $\mathrm{E}(x,t) = \mathrm{E}_0 e^{i(\omega t - kx)}$.

Soit un milieu d'indice de réfraction n, on rappelle l'équation d'ondes :

$$\frac{\partial^2 \mathrm{E}(x,t)}{\partial x^2} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2 \mathrm{E}(x,t)}{\partial t^2} = 0.$$

Q. 1.1 *En utilisant cette équation et l'expression supposée de* $E(x,t)$ *trouver une condition reliant* ω, n, k *et* c *pour que ce champ soit effectivement solution de l'équation.*

On décrit le milieu dans lequel se propage les ondes par un indice de réfraction complexe : $n = n' - in''$ où $\{n', n''\} \in \mathbb{R}^2$ et sont positifs. Les ondes auront donc un vecteur d'onde qui sera également complexe et que l'on notera : $k = k' - ik''$ où $\{k', k''\} \in \mathbb{R}^2$ et sont positifs. On a ainsi : $E(x,t) = E_0 e^{-k''x} e^{i(\omega t - k'x)}$.

Q. 1.2 *Relier* n' *à* k' *et* n'' *à* k''.

Pour une telle onde, on peut montrer que la puissance absorbée par unité de surface prend la forme : $\mathscr{P}(x) = \frac{E(x,t) \times E^*(x,t)}{\mu_0 c}$, où E^* désigne le conjugué complexe de E, $\mu_0 = 1,25 \times 10^{-6}$ kg.m.A^{-2}.s^{-2} est la perméabilité du vide et $c = 3 \times 10^8 m.s^{-1}$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

Q. 1.3 *Calculer la longueur d'atténuation* δ *telle qu'entre deux points* x *et* $x' = x + \delta$ *la puissance ait diminuée d'un rapport* $1/e \sim 37\%$.

Q. 1.4 *Rappeler la relation reliant la longueur d'onde dans le vide* λ *et la pulsation* ω.

Q. 1.5 *En déduire que* $\delta = \frac{\lambda}{4\pi n''}$.

L'eau liquide et les cloisons murales ont des parties imaginaires de leur indice de réfraction relativement proches, que l'on prendra égales à $n'' = 0,2$.

Q. 1.6 *Estimer la longueur d'atténuation du WiFi et des micro-ondes dans ces milieux.*

Q. 1.7 *Expliquer pourquoi il n'y a aucun intérêt à fabriquer des micro-ondes de grand volume, on précisera la notion de "grand".*

Q. 1.8 *En comparaison, expliquer l'intérêt d'utiliser des fréquences autour de* 800 MHz *pour transmettre la 4G.*

2 Chauffage par micro-ondes

On souhaite réchauffer un bol de soupe, que l'on considèrera principalement composée d'eau, préalablement congelée à une température de $T_i = -5\,°C$. Elle est contenue dans un récipient cylindrique dont elle occupe initialement la moitié du volume. Avant de mettre la soupe dans le micro-onde on enlève le couvercle. De l'air à température ambiante $T_1 = 20°$ et pression ambiante occupe ainsi l'autre partie du récipient. On considèrera que l'air, ainsi que la vapeur d'eau peuvent être traités comme des gaz parfaits. Le récipient a une hauteur totale de $h = 6\,\text{cm}$ et un rayon $r = 5\,\text{cm}$.

Le four a une puissance $\Pi = 1000\,\text{W}$, et l'eau en absorbe seulement la moitié. La mise en rotation du récipient permet de plus du supposer que l'échauffement est uniforme.

De plus, on supposera, et on le justifiera plus tard, qu'étant donné la vitesse du chauffage, on peut négliger les échanges thermiques entre l'air et la soupe.

On donne :

- La masse volumique de l'eau à l'état solide : $\rho_s = 900\,\text{kg.m}^{-3}$
- La masse volumique de l'eau à l'état liquide : $\rho_l = 1000\,\text{kg.m}^{-3}$
- La capacité thermique massique de l'eau à l'état solide : $c_s = 2\,\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- La capacité thermique massique de l'eau à l'état liquide : $c_l = 4\,\text{kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- La chaleur latente massique de fusion de l'eau : $\text{L}_f = 333\,\text{kJ.kg}^{-1}$

La soupe est introduite à la température T_i dans le four à micro-onde qui est ensuite mis en fonctionnement à $t_0 = 0$.

Q. 2.1 *La glace atteint la température* $0\,°\text{C}$ *à* t_1*, calculer* $t_1 - t_0$.

Q. 2.2 *La glace devient liquide à* t_2*, calculer* $t_2 - t_1$.

On pose alors une assiette de masse $m = 500\,\text{g}$ sur le récipient. Afin d'éviter les projections, on souhaite que l'assiette ne se soulève pas.

Q. 2.3 *Justifier par un raisonnement empirique, que l'air n'absorbe pas le rayonnement micro-onde.*

Si l'air ne peut pas s'échauffer en absorbant du rayonnement, sa température pourrait par contre augmenter en échangeant de l'énergie avec la soupe par convection.

Q. 2.4 *Calculer la variation de pression* ΔP *nécessaire pour soulever l'assiette.*

Q. 2.5 *Calculer quelle devrait être la température de l'air pour soulever l'assiette, et conclure.*

Puisque la température de l'air dans le récipient ne change pas, l'augmentation de pression dans le récipient vient d'un autre phénomène, en l'occurrence, la vaporisation de l'eau au moment de l'ébullition.

Une approximation de la formule de Dupré permet de calculer l'accroissement de pression ΔP du à la vaporisation d'un liquide en fonction de la température T du liquide, avec P_0 la pression de l'air seul :

$$\ln\left(1+\frac{\Delta P}{P_0}\right) = 5120\left(\frac{1}{T_e}-\frac{1}{T}\right),$$

où, T_e est la température d'ébullition. On notera $\Delta T = T - T_e$.

Q. 2.6 *Montrer que si* $\Delta T << T_e$, *alors* $\Delta P << P_0$.

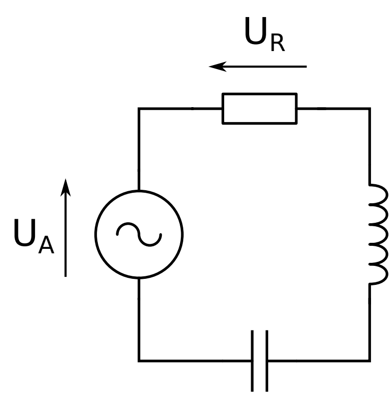
Q. 2.7 *Montrer que, avec ces conditions, on peut faire l'approximation :* $\Delta P = P_0 \times 5120 \frac{\Delta T}{T_e^2}$.

Q. 2.8 *Calculer le temps dont on dispose entre le moment de début de l'ébullition et celui où l'assiette se soulève.*

3 Canaux WiFi

Le WiFi est découpé en plusieurs bandes de fréquences adjacentes, appelées canaux, de largeur $\Delta f = 20\,\mathrm{MHz}$, centrées autour de fréquences proches de $2{,}4\,\mathrm{GHz}$. Pour choisir le canal utilisé pour communiquer, on utilise un circuit RLC série.

On considèrera que l'antenne se comporte comme un générateur de tension U_A. On s'intéresse à la tension au bornes de la résistance U_R.



Forme de la tension aux bornes de la résistance

Q. 3.1 *Montrer que l'impédance équivalente de l'ensemble formé par les trois dipôles en série est* $Z = R + iL\omega - i\frac{1}{C\omega}$.

Q. 3.2 *En déduire que* $U_R = \frac{U_A}{1+iQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$ *avec* $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, *et* $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Étude du filtre

Q. 3.3 *Donner les valeurs prises par* U_R *lorsque* $\omega \to 0$ *et* $\omega \to +\infty$*, et conclure quant au type de filtrage réalisé par ce montage.*

Q. 3.4 *Calculer pour quelle valeur de* ω*,* $|U_R|$ *atteint sa valeur maximale et donner la valeur que prend* $|U_R|$ *à cette fréquence.*

Soit G le gain du filtre en dB, défini par : $G(\omega) = 10\log\left|\frac{U_R^2}{U_A^2}\right|$. On pourrait montrer que pour $\omega_+ = \frac{\omega_0}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}+\frac{1}{Q}\right)$ et $\omega_- = \frac{\omega_0}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}-\frac{1}{Q}\right)$, $G(\omega_+)$=$G(\omega_-) = -3\,\text{dB}$.

Q. 3.5 *Estimer le rapport* $\left|\frac{U_R}{U_A}\right|$ *en* ω_+ *et* ω_-.

Q. 3.6 *Donner l'expression de la bande passante* $\Delta\omega = \omega_+ - \omega_-$ *en fonction des valeurs des composants électroniques et conclure en indiquant quel composant il est le plus judicieux de faire varier afin de changer la fréquence centrale.*

Interférences avec les fours à micro-ondes

Le WiFi permet typiquement de transmettre 10 Mbits/s.

Q. 3.7 *Estimer le nombre de périodes du signal à* 2,4 GHz *qu'il faut pour transmettre un bit.*

Supposons que dans une même pièce, se superposent un signal WiFi ayant une fréquence f_{WF} = 2,41 GHz et le rayonnement d'un micro-onde de fréquence f_{MO} = 2,43 GHz. On peut décrire chacun des deux signaux par la la fonction $S_{WF} = A\cos\left(\frac{f_{WF}}{2\pi}t\right)$ et $S_{MO} = A\cos\left(\frac{f_{MO}}{2\pi}t\right)$. Si les amplitudes des deux sources sont équivalentes, cela revient à sommer les signaux et le signal résultant est simplement donné par $S = S_{WF} + S_{MO}$. On donne la formule :

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

Q. 3.8 *Représenter schématiquement le signal résultant des interférences en fonction du temps, on prendra soin de faire apparaître les grandeurs* f_{WF} *et* f_{MO}.

Q. 3.9 *En déduire les deux raisons pour lesquelles la transmission de l'information est détériorée.*

CentraleSupélec

Juin 2018

Épreuve écrite de Mathématiques

Admission voie DUT

2 heures

Les documents et appareils électroniques sont interdits.

La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.

Chaque affirmation doit être justifiée par une démonstration. Les 5 exercices sont indépendants.

Exercice 1

Q. 1.1 Justifier l'existence de l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Q. 1.2 Calculer la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2

On définit $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q. 2.1 Pour tout $x \in [0,1]$, calculer la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On notera cette limite $f(x)$.

Q. 2.2 La fonction f obtenue est-elle continue sur $[0,1]$?

Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $[0,1]$ et g une fonction à valeurs réelles définie sur $[0,1]$ et qui satisfont à la propriété : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que, pour tout n plus grand que N_ε,

$$\max_{x\in[0,1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Q. 2.3 Montrer que la fonction g est continue.

Q. 2.4 Montrer que la fonction f obtenue en Q. 2.1 est continue sur $[0,a]$, si $0 < a < 1$.

Exercice 3

Q. 3.1 Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1.
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. $f_n : x \mapsto (\sin(x))^n$, $n \in \{1,2,3\}$

3. $(x \mapsto (\sin(x))^n), (x \mapsto (\cos(x))^n)$, $n \in \{1,...,4\}$.

Q. 3.2 Soit $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i \in \{1,2,3\}$ une famille de fonctions. On pose

$$\begin{aligned} \mathrm{A} : \mathbb{C}^3 &\longrightarrow \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (f_i(x_j))_{1\leq i,j\leq 3} \end{aligned}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction déterminant de A, det(A), pour que la famille $(f_i)_{1\leq i\leq 3}$ soit libre.

Exercice 4

Soit la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Q. 4.1 La matrice A est-elle inversible ?

Q. 4.2 Calculer les valeurs propres de A et des vecteurs propres associés.

Q. 4.3 La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y définie par

$$\mathrm{Y} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{X}}{2} & \text{si X est paire} \\ 0 & \text{si X est impaire} \end{cases}$$

Q. 5.1 Déterminer la loi de Y.

Q. 5.2 Calculer l'espérance et la variance de Y.

CentraleSupélec

Juin 2019

Épreuve écrite de Mathématiques
Admission voie DUT

2 heures

Les documents et appareils électroniques sont interdits.

La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.
Chaque affirmation doit être justifiée par une démonstration. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1

Q. 1.1 Soit n un entier positif. Justifier l'existence de l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^{2n}}{e^{x^2}} \mathrm{d}x.$$

Q. 1.2 Calculer la valeur de l'intégrale I_0.

Q. 1.3 Calculer la valeur de l'intégrale I_1.

Exercice 2

Pour $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, pour n un entier positif, on note $\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.
On définit $f_n : x \in [0,1] \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q. 2.1 Pour tout $x \in [0,1]$, calculer la limite de $\sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On notera cette limite $\varphi(x)$.

Q. 2.2 La fonction f obtenue est-elle continue sur $[0,1]$?

Soient $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $[0,1]$ et qui satisfait à la propriété : il existe un réel positif M tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \max_{x\in[0,1]} |g_k(x)| \leq \mathrm{M}.$$

Q. 2.3 Soit n un entier positif. Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$ est définie pour tout $x \in [0,1]$ et continue sur $[0,1]$.

Q. 2.4 Montrer que la fonction $x \mapsto \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} g_k(x)$ est définie pour tout $x \in [0,1]$. On la notera σ.

On admettra que σ est continue sur $[0,1]$.

Q. 2.5 Montrer que la fonction φ obtenue en Q. 2.1 est continue sur $[0,a]$, si $0 < a < 1$.

Exercice 3

Dans cet exercice, n est un entier positif.

Q. 3.1 Etudier l'indépendance linéaire :

1. des vecteurs
$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. de la famille de fonctions $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ définies par :
   pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, $f_i : x \mapsto |x-a_i|$, $a_1,\ldots,a_n$ étant des réels distincts.

Soient a, b, c trois nombres complexes. Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

Q. 3.2 Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que A soit inversible.

Q. 3.3 Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que A soit diagonalisable.

Exercice 4

Calculer les limites suivantes :

Q. 4.1
$$\lim_{x\to 1}(3^x + 4^x - 6^x)^{\tan(\pi x/2)}$$

Q. 4.2
$$\lim_{x\to\pi/4,\, x<\pi/4}(\tan(x))^{\tan(2x)}$$