Juin 2018

Épreuve écrite de Mathématiques

2 heures

Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.

Exercice 1

Q. 1.1 Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

Q. 1.2 Calculer la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2

Soit P un polynôme à coefficients réels, $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P a toutes ses racines réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $P' + \alpha P$ a également toutes ses racines réelles.

Q. 2.1 Supposons tout d'abord P à racines simples. Montrer que $P' + \alpha P$, où P' est le polynôme dérivé de P, est également à racines simples réelles.

Q. 2.2 On ne suppose plus P à racines simples. Montrer que toutes les racines réelles de $P' + \alpha P$ sont réelles.

Exercice 3

Q. 3.1 Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$.

Q. 3.2 Etudier la convergence de la série sur le cercle de centre 0 et de rayon R.

Exercice 4

Q. 4.1 Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $f_n : x \mapsto (\sin(x))^n$, $n \in \mathbb{N}$

2. $f_a : x \mapsto |x - a|$, $a \in \mathbb{R}$

3. $f_\alpha : x \mapsto \exp(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$

4. $(x \mapsto (\sin(x))^n), (x \mapsto (\cos(x))^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Q. 4.2 Soit $n \geq 1$. Soit $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ une famille de fonctions. On pose

$$\begin{aligned} \mathrm{A} : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathscr{M}_{\backslash}(\mathbb{C}) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction det(A) pour que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit linéairement indépendante.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y définie par

$$\mathrm{Y} = \begin{cases} \frac{\mathrm{X}}{2} & \text{si X est paire} \\ 0 & \text{si X est impaire} \end{cases}$$

Q. 5.1 Déterminer la loi de Y.

Q. 5.2 Calculer l'espérance de Y.

Q. 5.3 Calculer la variance de Y.

June 2018

Written test - Mathematics

2 hours

The use of documents and calculators is forbidden.

The quality of writing is an important element for the evaluation.

Exercise 1

Q. 1.1 Justify the existence of

$$\mathrm{I} = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Q. 1.2 Compute the value of the integral I.

Exercise 2

Let P be a polynomial with real coefficients, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Assume all its roots are real. Let $\alpha \in \mathbb{R}$. We want to prove that all the roots of $\mathrm{P}' + \alpha\mathrm{P}$ are real too.

Q. 2.1 Assume at first that P has only simple roots. Show that $\mathrm{P}' + \alpha\mathrm{P}$, where P' the derivative polynomial of P, has only real simple roots, as well.

Q. 2.2 We do not assume that the roots of P are all simple anylonger. Show that the roots of $\mathrm{P}' + \alpha\mathrm{P}$ are all real.

Exercise 3

Q. 3.1 Determine the convergence radius R of the series $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$.

Q. 3.2 Study the convergence of the series on the circle of center 0 and radius R.

Exercise 4

Q. 4.1 Study the linear independence of the following families:

1. $f_n : x \mapsto (\sin(x))^n$, $n \in \mathbb{N}$
2. $f_a : x \mapsto |x - a|$, $a \in \mathbb{R}$
3. $f_\alpha : x \mapsto \exp(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$
4. $(x \mapsto (\sin(x))^n), (x \mapsto (\cos(x))^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Q. 4.2 Let $n \geq 1$. Let $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ be a family of functions. Set

$$\begin{aligned} \mathrm{A} : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathscr{M}_\backslash(\mathbb{C}) \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (f_i(x_j))_{1 \leq i,j \leq n} \end{aligned}$$

Find a necessary and sufficient condition on the function $\det(\mathrm{A})$ so that the family $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ is linearly independent.

Exercise 5

Let X be a real random variable following Poisson's law with parameter λ. Let Y be defined as

$$\mathrm{Y} = \begin{cases} \frac{\mathrm{X}}{2} & \text{if X is even} \\ 0 & \text{if X is odd} \end{cases}$$

Q. 5.1 Determine the law of Y.

Q. 5.2 Compute the expectation of Y.

Q. 5.3 Compute the variance of Y.

CentraleSupélec

castIng
Devenez ingénieur centralien

Juin 2019

Épreuve écrite de Mathématiques

2 heures

Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.

Exercice 1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Q. 1.1 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue sur I.

Q. 1.2 Donner un exemple d'intervalle J et de suite de fonctions continues sur J qui converge simplement vers une fonction f, avec f non-continue sur J.

Q. 1.3 Soient $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable sur tout compact de I et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathrm{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$ telle que $|f_n'(t)| \leq g(t)$ pour tout n et tout $t \in \mathrm{I}$. On suppose de plus que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f. Montrer que f est continue sur I.

Exercice 2 Soit P un polynôme à coefficients réels, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. On suppose que

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - a_1\mathrm{X}^{n-1} - a_2\mathrm{X}^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\mathrm{X} - a_n$$

avec $a_i \geq 0$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ et $a_n > 0$.

Q. 2.1 Montrer que P admet une unique racine α sur $\mathbb{R}_*^+$.

Q. 2.2 Soit z une racine (réelle ou complexe) de P. Montrer que $|z| \leq \alpha$.

Q. 2.3 On suppose que $z \neq \alpha$. Montrer que $|z| \leq \alpha$.

Exercice 3 Pour une suite de complexes $a = (a_n)_n$ on pose

$$\mathrm{A}(a) = \{r \geq 0 / (|a_n| r^n)_n \text{ est majorée}\}$$

$$\mathrm{B}(a) = \{r \geq 0 / \lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0\}$$

$$\mathrm{C}(a) = \{r \geq 0 / \sum_n a_n r^n \text{ est convergente}\}$$

Q. 3.1 Justifier les inclusions $\mathrm{C}(a) \subset \mathrm{B}(a) \subset \mathrm{A}(a)$. Montrer que ces inclusions peuvent être strictes.

Q. 3.2 Montrer que, dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, on a $\sup \mathrm{A}(a) = \sup \mathrm{B}(a) = \sup \mathrm{C}(a)$.

On rappelle que le rayon de convergence d'une série entière $\sum_n a_n z^n$ correspond à la borne supérieure de l'ensemble $\mathrm{A}(a) = \{r \geq 0 / (|a_n| r^n)_n \text{ est majorée}\}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Q. 3.3 Déterminer le rayon de convergence des séries entières

$$\text{a) } \sum_n \frac{1+i}{n} z^{n^2}, \qquad \text{b) } \sum_n 2^{(-1)^n n} z^n, \qquad \text{c) } \sum_n \cos(2^n) z^n.$$

Exercice 4 Dans l'espace de probabilité $(\Omega, , \mathscr{F}, \mathbb{P})$, X et Y désignent deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes.

Q. 4.1 Montrer que

$$\mathbb{P}(\mathrm{X} = \mathrm{Y}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = k) \times \mathbb{P}(\mathrm{Y} = k)$$

On suppose à partir de maintenant que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et qu'il existe $p \in]0, 1[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\mathrm{Y} = k) = p \times (1-p)^k$.

On considère la matrice aléatoire $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} & \mathrm{X}+\mathrm{Y} \\ 0 & \mathrm{Y} \end{pmatrix}$.

Q. 4.2 Calculer la probabilité que A ne soit pas inversible.

Q. 4.3 Préciser la loi de la variable aléatoire $\mathrm{rang}(\mathrm{A})$ ainsi que son espérance.

Q. 4.4 Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour qu'une matrice de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, de la forme $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Q. 4.5 Calculer la probabilité que A soit diagonalisable.

June 2019

Written test - Mathematics

2 hours

A standard -non scientific- language dictionary is authorized. Please make sure to have it checked by the staff. Documents, electronic devices and calculators are not allowed.

The quality of the justifications will be taken into account in the mark.

Exercise 1 Let I be an interval of $\mathbb{R}$.

Q. 1.1 *Let $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of continuous functions from I to $\mathbb{R}$. We assume that $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges uniformly to a function $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Show that f is continuous over I.*

Q. 1.2 *Give an example of an interval J and of a sequence of continuous functions over J that converges simply to a function f, with f a non continuous function over J.*

Q. 1.3 *Let $g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}_+$ be an integrable function over all compacts of I and $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequence of functions of $\mathrm{C}^1(\mathrm{I},\mathbb{R})$ tsuch that $|f_n'(t)| \leq g(t)$ for all n and all $t \in \mathrm{I}$. Assume moreover that the sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges simply to a function f. Show that f is continuous over I.*

Exercise 2 Let P be a polynomial with real coefficients, $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$. Assume that

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n - a_1\mathrm{X}^{n-1} - a_2\mathrm{X}^{n-2} - \ldots - a_{n-1}\mathrm{X} - a_n$$

with $a_i \geq 0$ for all $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ and $a_n > 0$.

Q. 2.1 *Show that, on $(0,+\infty)$, P has a unique root α.*

Q. 2.2 *Let z be a (real or complex) root of P. Show that $|z| \leq \alpha$.*

Q. 2.3 *Assume $z \neq \alpha$. Show that $|z| \leq \alpha$.*

Exercise 3 **Q. 3.1** *Justify the inclusions* $C(a) \subset B(a) \subset A(a)$. *Show that* $C(a) \neq B(a)$ *and* $B(a) \neq A(a)$.

Q. 3.2 *Show that, in* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\sup A(a) = \sup B(a) = \sup C(a)$. *Recall that, for any subset* E *of* $\mathbb{R}$, $\sup E$ *is the unique element of* $\overline{\mathbb{R}}$ *such that for all* $r \in E$, $r \leq R$ *and for all* $\varepsilon > 0$, *there exists* $r \in E$ *such that* $r + \varepsilon > R$.

Recall that the radius of convergence R of the power series $\sum_n a_n z^n$ is the supremum $\sup A(a)$ of the set $A(a)$ in $\overline{\mathbb{R}}$.

Q. 3.3 *Determine the radius of convergence of the following power series*

$$a) \sum_n \frac{1+i}{n} z^{n^2}, \qquad b) \sum_n 2^{(-1)^n n} z^n, \qquad c) \sum_n \cos(2^n) z^n.$$

Exercise 4 In the probability space $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, let X and Y be two independent non-negative integer-valued random variables.

Q. 4.1 *Show that*

$$\mathbb{P}(X = Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) \times \mathbb{P}(Y = k)$$

Assume from now on that the distribution of X is a Poisson distribution of parameter $\lambda > 0$ and that there exists $p \in]0, 1[$ such that $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(Y = k) = p \times (1-p)^k$.

For any $\omega \in \Omega$, we consider the matrix $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & X(\omega) + Y(\omega) \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$.

Q. 4.2 *Compute the probability that* A *is not invertible, that is,* $\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega$ *such that* $A(\omega)$ *is not invertible*$\})$.

Q. 4.3 *Give the law of the random variable of the rank of* A, *that is the dimension of the image of* A, *and its expected value.*

Q. 4.4 *Give a necessary and sufficient condition on* a, b *and* c *for a* 2×2 *matrix of the form* $\begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$ *to be diagonalizable.*

Q. 4.5 *Compute the probability that* A *is diagonalizable.*