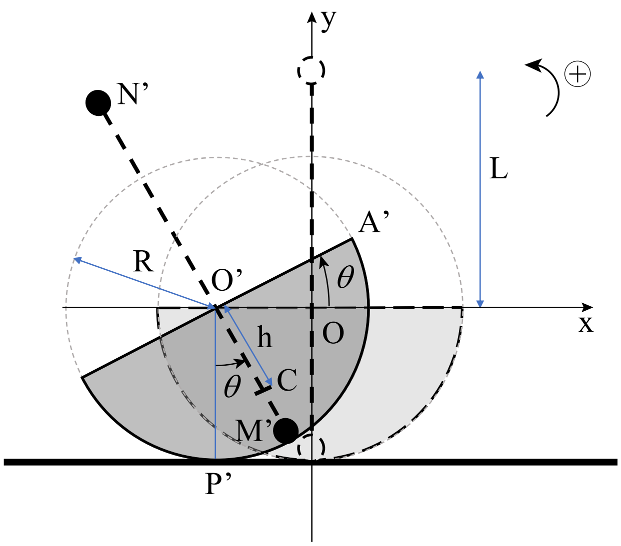
CentraleSupélec

Juin 2018

Épreuve écrite de Mécanique

2 heures

Exercice 1. Dynamique d'un culbuto



Un culbuto est dans un premier temps (Questions 1-9) idéalisé par une demi-sphère de roulement de rayon R avec une masse concentrée M située à sa base et une seconde masse concentrée m, liée rigidement à la précédente, et située à l'aplomb à une distance L du centre de l'hémisphère noté O'. La masse de l'hémisphère est négligée par rapport à m et M ainsi que le moment d'inertie de tous les éléments autres que les masses m et M.

On suppose que le culbuto roule sans glisser dans le plan (x, y). L'origine du repère sera prise en O, le centre de l'hémisphère lorsque le culbuto est au repos (au repos $\mathrm{O} = \mathrm{O}'$). θ est l'angle entre $\vec{e_x}$ et $\overrightarrow{\mathrm{O}'\mathrm{A}'}$, orienté dans le sens direct. L'accélération de la pesanteur g est prise égale à 10 ms^{-2}. C désigne le centre de masse du système.

Q. 1 *Donner les expressions des composantes des vecteurs vitesse $\vec{v}_m$, $\vec{v}_\mathrm{M}$ et $\vec{v}_\mathrm{C}$ des masses m, M et du centre de masse C en fonction de $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$, $\theta(t)$, R, L et $h = (\mathrm{M}\mathrm{R} - m\mathrm{L})/(\mathrm{M}+m)$.*

Q. 2 *Faire l'inventaire de toutes les forces s'exerçant sur le système en précisant leur point d'application et leur direction. Préciser s'il s'agit de force conservatives et le travail induit par ces forces lors du mouvement.*

Q. 3 *Donner l'énergie potentielle $\mathscr{E}_\mathrm{p}$ et l'énergie cinétique $\mathscr{E}_\mathrm{kin}$ du système en fonction de ω, $\theta(t)$, M, m, R, L, h et g. Vérifier que l'énergie cinétique peut se mettre sous la forme :*

$$\mathscr{E}_\mathrm{kin} = \frac{1}{2}(\mathrm{M}+m)\|\vec{v}_\mathrm{C}\|^2 + \frac{\mathrm{I_C}}{2}\omega^2$$

Donner l'expression de $\mathrm{I_C}$ et commenter.

Q. 4 *Donner une condition de stabilité du culbuto en fonction de h ainsi qu'une relation entre l'amplitude maximale* $\theta_{\max}$ *et la vitesse angulaire maximale* $\omega_{\max}$ *dans le cas stable.*

Q. 5 ***Bonus****: Dans le cas stable, donner l'expression de la période d'oscillation en fonction de l'angle maximal* $\theta_{\max}$.

Q. 6 *Donner l'équation différentielle du second ordre satisfaite par l'angle* θ.

Q. 7 *On suppose que les oscillations sont de très faibles amplitudes. En notant* $x_m(t) = -(R+L)\theta(t)$*, montrer que l'équation différentielle précédente peut se mettre sous la forme :*

$$-kx_m = m\frac{d^2x_m}{dt^2},$$

où on donnera la valeur de k en fonction de M, m, R, L, h *et* g .

Q. 8 *Donner et discuter la solution générale pour les conditions initiales* $x_m(0) = x_o$ *et* $\frac{dx_m}{dt}(0) = 0$ *en fonction du signe de h et d'une pulsation propre* ω_o *à déterminer.*

Q. 9 *Toujours dans l'hypothèse des petites oscillations, on introduit une force de dissipation de la forme* $\overrightarrow{F}_d = -c\overrightarrow{v}_m$ *avec* $h > 0$ *et* $c \ll 2\sqrt{km}$*. Donner et discuter la nouvelle solution.*

Q. 10 *Le culbuto est maintenant supposé constitué d'un hémisphère de rayon* R *surmonté d'un cylindre de hauteur* H *et de rayon* r*, ces deux parties étant pleines et constituées du même matériau homogène de densité* ρ_o*. On ne se restreint plus aux très faibles amplitudes. Montrer que l'on peut se ramener au cas précédent pour la résolution et donner les valeurs de la masse totale* $M+m$*, de h et de* I_C *en fonction de* R, H, r *et* ρ_o.

Q. 11 ***Bonus****: Proposer une méthodologie pour résoudre le problème du culbuto dans le cas où le mouvement n'est pas restreint à un plan vertical* (NB: La résolution complète n'est pas demandée, seulement la démarche.)

Exercice 2. Profil de température dans une atmosphère sèche

L'air est supposé se comporter comme un gaz parfait de constante adiabatique $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = 1,4$ et de masse molaire $\mu = 29$ g/mol. $R = 8.3$ J mol^{-1}K^{-1} est la constante des gaz parfaits. L'atmosphère est supposée au repos et en équilibre statique et thermodynamique sous une gravité $g = 10$ m.s^{-2}. $P(z)$ est la pression en fonction de l'altitude z, $\rho(z)$ la masse volumique et $T(z)$ la temperature.

Q. 12 *Donner la relation entre le gradient vertical de température* dP/dz*, la densité et la gravité.*

Q. 13 *Rappeler la loi des gaz parfaits et en déduire pour un volume élémentaire de gaz contenant un nombre fixe de particules en équilibre thermodynamique une expression de* P *en fonction de* ρ, T, R *et* μ.

Q. 14 *En déduire que pour une atmosphère isotherme* $\mathrm{T}(z) = \mathrm{T}_o$, *la répartition de la densité et de la pression décroit exponentiellement avec l'altitude :*

$$\mathrm{P}(z) = \mathrm{P}_o e^{-\beta z}$$

Donner l'expression de β *et sa valeur approchée pour* $\mathrm{T}_o = 273\mathrm{K}$.

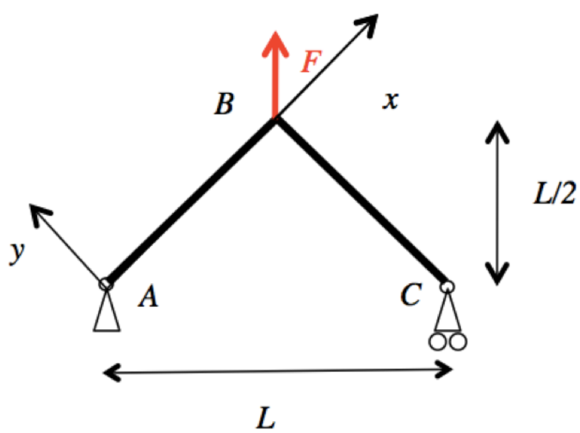
Q. 15 *Pour un processus adiabatique réversible rappeler la relation entre* P *et* V *d'une part, et entre* P *et* T *d'autre part. En déduire une relation entre* $d\mathrm{P}/\mathrm{P}$ *et* $d\mathrm{T}/\mathrm{T}$.

Q. 16 *En supposant qu'un système constitué d'un nombre fixe de particules d'air se déplace de* z *à* $z + dz$ *sans échange de chaleur avec le milieu extérieur en déduire que :*

$$\frac{d\mathrm{P}}{dz} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{T}} \frac{d\mathrm{T}}{dz}$$

Q. 17 *En conclure que la température évolue linéairement avec l'altitude* $\left(\frac{d\mathrm{T}}{dz} = -\alpha\right)$ *et donner l'expression de* α *en fonction de* γ, R *et* μ *ainsi que sa valeur approchée. Justifier la pertinence de ce résultat par rapport à des observations météorologiques.*

Exercice 3. Assemblage de poutres



Une structure est constituée de deux poutres identiques AB et BC assemblées à angle droit. La distance AC est égale à L. Le point B est à la distance L/2 de la droite AC. Le module d'Young noté E est constant sur les deux poutres. Le moment d'inertie de flexion par rapport au vecteur normal au plan ABC noté I et la section des poutres notée A sont constants.

On supposera que le modèle de poutres élancées d'Euler-Bernoulli s'applique aux deux poutres. La structure est rotulée en A et C et le point C est libre de se déplacer horizontalement mais ne peut se déplacer verticalement *(NB: les axes x et y associés à la poutre AB sont tournés de 45° par rapport à l'horizontale et la verticale.)* . Les deux poutres sont encastrées l'une à l'autre en B, l'angle restant égal à $\pi/2$. Une force verticale ascendante F est appliquée en B suivant la bissectrice externe de l'angle ABC. Les déplacements et les efforts sont supposés rester dans le plan et les moments perpendiculaire à ce plan. Les forces de pesanteur sont négligées. On se place dans l'hypothèse des déplacements et des rotations infinitésimales.

Q. 18 *Donner les forces résultantes (amplitude et direction) appliquées en A et C par les appuis sur la structure et donner pour la poutre AB l'effort normal* $\mathrm{N}(x)$ *(composante suivant l'axe de la poutre de la résultante des forces exercées à l'abscisse x sur la section) et de l'effort tranchant* $\mathrm{T}_y(x)$ *(composante suivant* $\overrightarrow{e}_y$ *de la résultante des forces exercées à l'abscisse x sur la section). Ces résultats peuvent éventuellement être donnés sous forme de diagrammes.*

Q. 19 *Donner le moment fléchissant* $\mathrm{M}_z(x)$ *dans la poutre AB en fonction de* x *et* F *(éventuellement sous forme de diagramme).*

Q. 20 *Par symétrie, donner une condition cinématique sur la valeur de la rotation des sections au point B. En déduire l'angle de rotation* θ *des sections en fonction de* x, F, L, E *et* I.

Q. 21 *Donner la déflection* $v(x)$ *de la poutre AB dans la direction* y *en fonction de* x, F, L, E *et* I.

Q. 22 *En supposant que le déplacement axial des deux poutres est négligeable par rapport au déplacement de flexion, donner le déplacement horizontal et vertical du point B et en déduire celui du point C.*

Q. 23 ***Bonus:*** *Comparer le déplacement vertical en B avec celui que l'on obtiendrait à mi-portée (à l'aplomb de B) d'une poutre rectiligne horizontale de longueur* L *rotulée en A et C avec un appui glissant horizontalement en C. Quelle solution offre plus de rigidité ?*

CentraleSupélec

Juin 2019

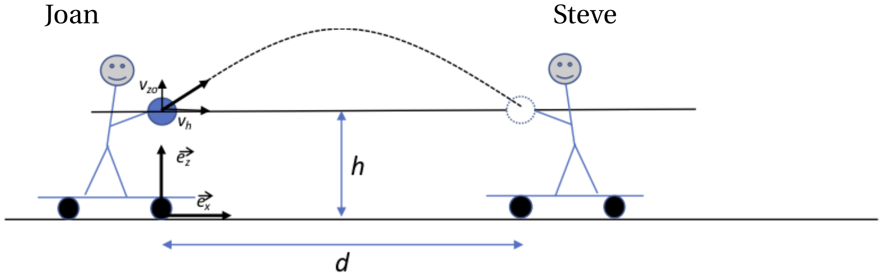
Épreuve écrite de Mécanique

2 heures

Cet examen est composé de trois exercices indépendants. En outre, les trois parties de l'exercice 2 sont indépendantes. Veuillez vous assurer que vous rédigez soigneusement les étapes de votre développement avec les hypothèses, principes et lois sous-jacents que vous utilisez à chaque étape. Pour chaque question, assurez-vous de préciser votre choix de système de coordonnées (sur un schéma du système par exemple).

Exercice 1. Joan et Steve jouent à la balle

Joan et Steve sont debout sur leurs planches à roulettes dirigées dans des directions opposées. Les deux sont au repos au début de l'expérience. La distance entre eux est d. Joan tient une balle de masse m. Steve a une masse de M et Joan une masse de M – m. La balle est soumise à un champ de gravité vertical constant g. Les centres de masse des deux joueurs sont supposés rester à la même hauteur h pendant l'expérience. On suppose que les planches à roulettes se déplacent le long d'un axe unique dirigé selon le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_x}$. La balle ne se déplace que dans le plan $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$. Les planches à roulettes sont supposées rouler sans glissement et sans dissipation d'énergie. Le frottement de l'air sur la balle est négligé.



La balle quitte les mains de Joan à une hauteur h, avec une vitesse horizontale de v_h et une vitesse verticale de v_{zo} dans le repère du laboratoire.

Q. 1 *Donner la vitesse de Joan après avoir lancé la balle et la valeur de v_{zo}, la composante verticale de la vitesse de la balle pour que celle-ci atteigne Steve à la hauteur h.*

Q. 2 *Donner la valeur de la somme de l'énergie cinétique et potentielle du système composé des deux joueurs et de la balle, avant et après que Joan a lancé celle-ci (mais avant que la balle n'atteigne Steve). Commenter si le fait de lancer la balle peut être considéré comme une collision élastique.*

Steve attrape la balle et on suppose qu'il la garde à la hauteur h une fois attrapée.

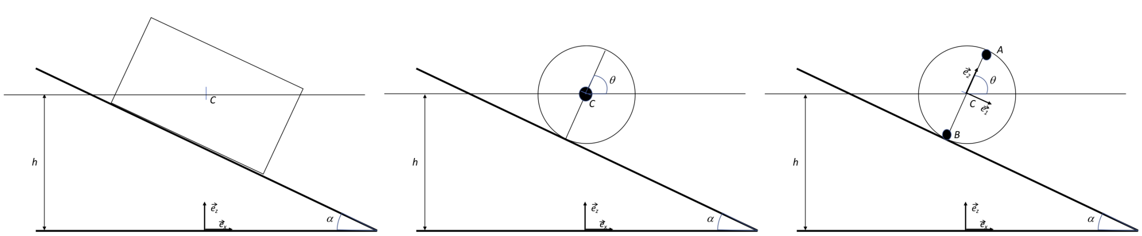
Q. 3 *Donner la valeur de la vitesse de Steve après avoir attrapé la balle et celle de la somme de l'énergie cinétique et potentielle du système composée des deux joueurs et du ballon avant et après que Steve a attrapé la balle. Préciser si le fait d'attraper la balle peut être considéré comme une collision élastique.*

On suppose maintenant que Steve n'attrape pas la balle et qu'elle rebondit sur lui. De plus, la balle est supposée frapper Steve à hauteur h et rebondir avec une composante verticale de la vitesse v_{zo} (la composante verticale de la vitesse appliquée par Joan lors du lancer de la balle). La collision entre la balle et Steve est supposée élastique.

Q. 4 *Donner les valeurs de la vitesse finale de Steve et de la vitesse horizontale finale de la balle.*

Exercice 2. Pente glissante ou roulante

Trois objets différents : une boîte et deux roues différentes, ayant toutes la même masse m sont positionnées au repos à $t = 0$ sur une pente inclinée avec un angle d'inclinaison α et avec leurs centres de masse respectifs à la même hauteur $z = h$. En dehors de la gravité verticale vers le bas de magnitude g, ces objets ne sont soumis qu'aux forces de réaction du support. Le coefficient de friction μ peut varier en fonction des différents objets (L'amplitude de la force de friction $\overrightarrow{T}$ parallèle à la pente et opposée au mouvement est $\|\overrightarrow{T}\| \leq \mu \|\overrightarrow{N}\|$, avec $\overrightarrow{N}$ la force normale appliquée par la pente sur l'objet). Les coefficients de friction statiques et dynamiques sont supposés égaux.



(a) (b) (c)

La boîte glisse sans frottement (Fig. 1a)

Nous supposons que la boîte rigide glisse sans frottement le long de la pente ($\mu = 0$).

Q. 5 *Montrer que la force de réaction normale* N *est constante et donner sa valeur en fonction de* α, m *et* g. *En déduire que le vecteur d'accélération du centre de masse est constant. Donner sa direction et son amplitude.*

Q. 6 *Donner le vecteur vitesse du centre de masse* $\vec{v}_C$ *en fonction du temps* t. *A quel instant* t_b *le centre de masse de la boîte atteint-il* $z = 0$ *? Donner alors* v_{Cf}, *l'amplitude de la vitesse à cet instant.*

Une roue avec masse concentrée (Fig. 1b)

Nous considérons maintenant une roue circulaire de rayon R roulant sans glisser le long de la pente ($\mu > 0$). La masse totale m de la roue est localisée en son centre. La surface de roulement et toute autre partie de la roue sont supposées n'avoir aucune masse.

Q. 7 *En utilisant la conservation de l'énergie, donner* v_C, *la magnitude du vecteur vitesse du centre de masse, en fonction de sa hauteur actuelle* z, *de* g *et* h.

Q. 8 *A quel instant* t_1 *le centre de la roue atteint-il* $z = 0$ *et quelle est la vitesse* v_{C1} *à cet instant ? Comparer* t_1 *et* t_b *ainsi que* $\vec{v}_{C1}$ *et* $\vec{v}_{Cf}$.

Q. 9 *Donner les valeurs des forces de contact normales et tangentielles induites et s'assurer que la loi de frottement est satisfaite pour* $\mu > 0$.

Une roue avec deux masses opposées (Fig. 1c)

La deuxième roue a la même masse m et le même rayon R que la précédente. Cependant, la masse est également répartie en deux points A et B situés aux deux extrémités d'un diamètre de la roue ($m_A = m_B = m/2$). Lorsque le centre de la roue est à $z = h$, B est supposé être le point de contact avec la pente (voir Fig. 1c). Le vecteur unitaire $\vec{e_r}$ est défini comme $\vec{e_r} = \overrightarrow{CA}/R$. $\theta(t)$ est l'angle entre $\vec{e_r}$ et l'axe horizontal $\vec{e_x}$ avec $\theta(0) = \theta_o = \pi/2 - \alpha$. Les vecteurs de position de A et B sont alors :

$$\vec{r}_A = \vec{r}_C + R\vec{e_r} \qquad , \qquad \vec{r}_B = \vec{r}_C - R\vec{e_r}$$

Q. 10 *En supposant que l'on roule sans glisser, montrer que :*

$$\sin\alpha \, R\,(\theta(t) - \pi/2 + \alpha) = h - z(t)$$

où $z(t)$ *est l'altitude du centre de masse au temps* t. *En déduire l'énergie potentielle de la roue incluant les masses ponctuelles* A *et* B.

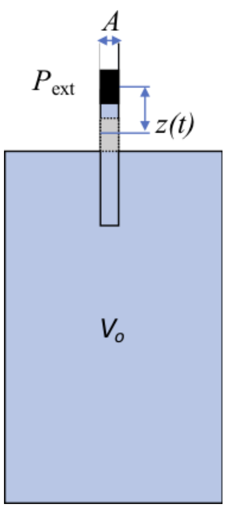
Q. 11 *Donner le vecteur de vitesse des points* A *et* B *en fonction de* $\frac{dz}{dt}dt$, R, $\sin\alpha$ *et tout autre ensemble adapté de vecteurs unitaires parmi* $\{\vec{e_x}, \vec{e_z}, \vec{e_\theta}\}$. *En déduire l'énergie cinétique de la roue.*

Q. 12 *Donner t_2, l'instant auquel C le centre de la roue atteint $z = 0$, et montrer qu'il est supérieur à t_1 et t_b d'un facteur qui ne dépend pas du rayon de la roue.*

Q. 13 *Donner les composantes normale et tangentielle de la force de réaction en fonction de t et donner un critère sur le coefficient de frottement μ pour éviter le glissement lors du roulement à tout instant t.*

Calculer la force appliquée par la partie restante de la roue sur la masse ponctuelle A.

Exercice 3. L'expérience de Ruchardt



L'expérience de Ruchardt vise à mesurer le coefficient de Laplace γ d'un gaz (le rapport des capacités calorifiques $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$). Le montage expérimental se compose d'un réservoir de gaz avec une sortie verticale de section circulaire de surface $A = 1\ cm^2$. Le tube est fermé par un piston de masse $m = 10\ g$ ayant la même section que le tube de surface A. Le piston peut se déplacer librement le long du tube sans frottement. Le gaz est supposé être un gaz parfait avec un coefficient de Laplace constant γ. On suppose que n le nombre de moles de gaz dans le récipient reste constant pendant l'expérience - fuites négligeables autour de la boule. La pression extérieure P_{ext} est supposée constante et égale à 10^5Pa.

On suppose que le récipient et la bille ne permettent aucun échange de chaleur avec l'extérieur. Les transformations de gaz sont supposées réversibles. Lorsque le piston est au repos, le volume de gaz est de $V_o = 10l$, sa température de $T_o = 290$K et sa pression est de P_o. $z(t)$ est l'abscisse verticale du centre de masse du piston en fonction du temps. Le référentiel est choisi de telle sorte qu'au repos $z_{\text{rest}} = 0$. Les variations de ces variables d'état sont supposées être faibles par rapport à ces valeurs de référence lorsque le piston se déplace. L'accélération de la pesanteur g est supposée être constante et égale à $10\ ms^{-2}$.

Q. 14 *Le piston est supposé être au repos à une hauteur donnée sans aucune action appliquée autre que la gravité g, la pression externe P_{ext} et la pression interne P_o. Donner P_o en fonction de P_{ext}, m, g, A et P_o (NB on suppose que la masse volumique du piston est beaucoup plus grande que la masse volumique de l'air). Conclure à l'aide des valeurs numériques que $P_o \approx P_{\text{ext}}$.*

Q. 15 *Dans l'hypothèse d'une transformation adiabatique réversible, exprimer P en fonction de V, V_o et P_o et exprimer :*

$$\left.\frac{dP}{dV}\right|_{S,n}$$

en fonction de γ, P et V.

Q. 16 *En supposant que z est beaucoup plus petit que* V_o/A, *montrer que la force* $\vec{F}$ *appliquée sur le piston s'écrit :*

$$\vec{F} = -kz\vec{e_z} \qquad \textit{with} \quad k = \gamma A^2 \frac{P}{V} \approx \gamma A^2 \frac{P_{ext}}{V_o}$$

Q. 17 *Ecrire la seconde loi de Newton du mouvement du piston et déduire l'équation différentielle ordinaire satisfaite par* $z(t)$.

Q. 18 *A* $t = 0$, *le piston situé à* $z_{rest} = 0$, *a une vitesse verticale ascendante initiale* $v_o = 0{,}2\ m/s$. *Donnez z en fonction du temps t, de la vitesse initiale* v_o *et d'une pulsation* ω_o *à exprimer en fonction de k et m.*

Q. 19 *On suppose que le piston oscille avec une période* T_o. *Donner* γ *en fonction de* T_o *et des autres paramètres. Dans l'expérience on mesure* $T_o = 1{,}70 \pm 0{,}02\ s$. *Quelle est l'amplitude maximale atteinte par z,* ΔV *et* ΔP. *Conclure sur la valeur obtenue pour* γ *et l'incertitude associée.*

Nous voulons confirmer la valeur obtenue en utilisant des ondes acoustiques. Il est rappelé que c_o la vitesse des ondes acoustiques est donnée par :

$$c_o^{-2} = \left.\frac{d\rho}{dP}\right|_{S,n}$$

Q. 20 *Pour un gaz parfait, montrer que* c_o *ne dépend que de* γ, *la masse molaire* $m_n = 29$ g/mol, *la température* $T = 290K$ *et la constante de gaz parfaite* $R = 8{,}3 J.mol^{-1}.K^{-1}.K^{-1}$. *Quelle est la valeur attendue de* c_o *pour la valeur de* γ *mesurée dans l'expérience de Ruchardt ?*
Nous utilisons un tube de longueur L *avec deux extrémités ouvertes, pour confirmer la valeur obtenue pour* γ. *Quelle est la première fréquence attendue donnant lieu à des ondes de pression stationnaires harmoniques ?*

CentraleSupélec

June 2019

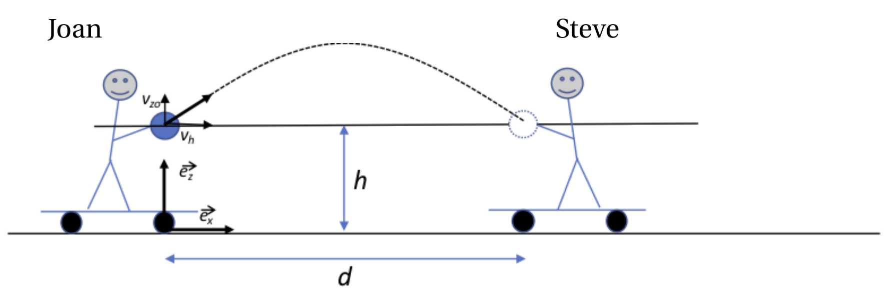
Written exam in Mechanics

2 hours

This exam consists of three independent exercises. In addition the three parts of exercise 2 are independent. Each question carries at least one mark. Please make sure that you carefully write the steps of your solution method with the underlying assumptions, principles and laws you use at each step. For each question, make sure you specify your choice of system of coordinates (on a schematics of the system for example).

Exercice 1. Joan et Steve play with a ball

Joan and Steve are standing on their skateboards which are directed in opposite directions. Both are at rest at the beginning of the experiment. The distance between them is d. Joan is holding a ball of mass m. Steve has a mass of M and Joan has a mass of $\mathrm{M} - m$. Hence Joan holding the ball is a system of mass M. The ball is subjected to a constant vertical gravity field g. The centres of mass of both players is assumed to stay at the same height h during the experiment. It is assumed that the skateboards move along a single axis directed by unit vector $\overrightarrow{e_x}$. The ball only moves in the $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ plane. Skateboards are assumed to roll without sliding and without any energy dissipation. Air friction on the ball is neglected.



The ball leaves Joan's hands at height h, with horizontal velocity v_h and vertical velocity v_{zo} in the lab frame.

Q. 1 *Give Joan's velocity after having thrown the ball.*

Give the value of v_{zo} the vertical component of the velocity of the ball so that the ball reaches Steve at height h ?

Q. 2 *Give the value of the sum of the kinetic and potential energy of the system made of the two players and the ball before and after Joan has thrown the ball (but before the ball reaches Steve). Comment on whether throwing the ball can be considered as an elastic collision.*

Steve catches the ball and it is assumed that he keeps the ball at height h once received.

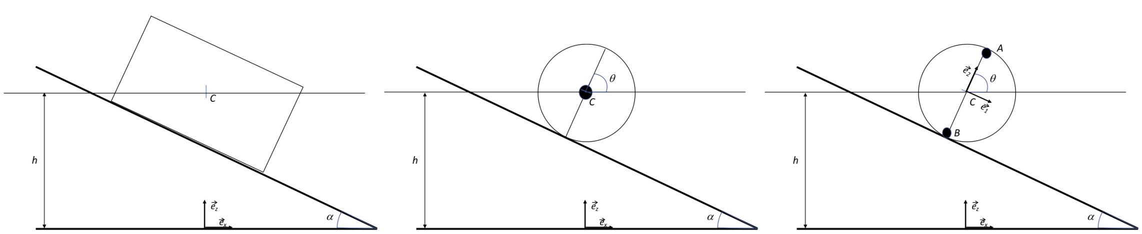
Q. 3 *Give the value of Steve's velocity after having caught the ball.*
Give the value of the sum of the kinetic and potential energy of the system made of the two players and the ball before and after Steve has caught the ball. Comment on whether catching the ball can be considered as an elastic collision.

It is assumed now that Steve does not catch the ball. Moreover the ball is assumed to hit Steve at height h and to bounce with a vertical component of the velocity v_{zo} (the exact vertical component of the velocity applied by Joan when throwing the ball). The collision between the ball and Steve is assumed to be elastic.

Q. 4 *Give the values of Steve's final velocity and of the final horizontal velocity of the ball.*

Exercice 2. Downhill

Three different objects: a box and two different wheels, all having the same mass m are positioned at rest at $t = 0$ on an angled slope with a tilt angle α and with their respective centres of mass at the same height $z = h$. Apart from vertical downwards gravity of magnitude g, these objects are only subjected to the reaction forces of the support. The friction coefficient μ may change values for the different objects (The magnitude of the friction-force $\overrightarrow{\mathrm{T}}$ parallel to the slope and opposed to the motion is $\|\overrightarrow{\mathrm{T}}\| \leq \mu \|\overrightarrow{\mathrm{N}}\|$, with $\overrightarrow{\mathrm{N}}$ the normal force applied by the slope on the object).



(a) (b) (c)

The box sliding without friction (Fig. 1a)

We assume that the rigid box slides without friction along the slope ($\mu = 0$).

Q. 5 *Show that the normal reaction force* N *is constant and give its value as a function of* α, m *and* g.
Show that the acceleration vector of the centre of mass is constant and give its direction and amplitude.

Q. 6 *Give the velocity vector of the center of mass $\overrightarrow{v}_C$ as a function of time t.*

At what time t_b does the centre of mass of the box reache $z = 0$? Give v_{Cf}, the amplitude of the velocity vector at that time.

<u>The rolling wheel with concentrated mass at the centre</u> (Fig. 1b)

We now consider a circular wheel of radius R rolling without sliding along the slope ($\mu > 0$). The total mass m of the wheel is localised at its center. The rolling surface and any other part of the wheel are assumed to have no mass.

Q. 7 *Using the conservation of energy, give v_C the magnitude of the velocity vector of the centre of the mass as a function of its current height z, g and h.*

Q. 8 *At what time t_1 does the centre of the wheel reach $z = 0$ and what is the velocity v_{C1} at that time ? Compare t_1 and t_b and $\overrightarrow{v}_{C1}$ and $\overrightarrow{v}_{Cf}$.*

Q. 9 *Give the values of the induced normal and tangential contact forces and make sure that the friction law is satisfied for* $\mu > 0$.

<u>The rolling wheel with two opposite point-masses</u> (Fig. 1c)

The second wheel has the same mass m and same radius R as the previous one. However the mass is equally distributed at two points A and B located at the two ends of one diameter of the wheel ($m_A = m_B = m/2$). When the centre of the wheel is at $z = h$, B is assumed to be the contact point with the slope (see Fig. 1c). The unit vector $\overrightarrow{e_r}$ is defined as $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{CA}/R$. $\theta(t)$ is the angle between $\overrightarrow{e_r}$ and the horizontal axis $\overrightarrow{e_x}$ with $\theta(0) = \theta_o = \pi/2 - \alpha$. Hence position vectors of A and B read:

$$\overrightarrow{r}_A = \overrightarrow{r}_C + R\overrightarrow{e_r} \qquad , \qquad \overrightarrow{r}_B = \overrightarrow{r}_C - R\overrightarrow{e_r}$$

Q. 10 *Assuming rolling without sliding show that:*

$$\sin\alpha\, R\,(\theta(t) - \pi/2 + \alpha) = h - z(t)$$

where $z(t)$ is the altitude of the centre of mass at time t.

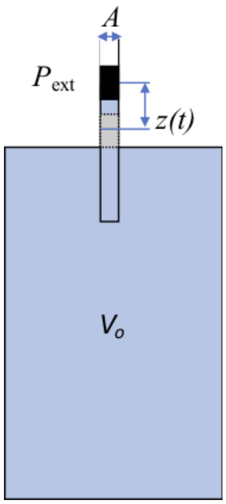
Give the potential energy of the entire wheel including point-masses A *and* B

Q. 11 *Give the velocity vector of points* A *and* B *as a function of* $\frac{dz}{dt}$, R, $\sin\alpha$ *and any convenient set of unit vectors amongst* $\{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}\}$. *Give the kinetic energy of the entire wheel*

Q. 12 *Give t_2 the time at which* C *the centre of the wheel reaches $z = 0$, and show that it is larger than t_1 and t_b by a factor that does not depend on the radius of the wheel.*

Q. 13 *Give the normal and tangential components of the reaction force as a fonction of t and give a criteria on the friction coefficient μ to prevent sliding when rolling at all time t.*
Compute the force applied by the remaining part of the wheel on the point-mass A.

Exercice 3. Ruchardt's experiment



Ruchardt's experiments aims at measuring the heat capacity ratio γ of a given gas ($\gamma = \frac{C_p}{C_v}$). The experimental set-up consists of a gas container with a vertical outlet of circular cross-section with area $A = 1\ cm^2$. The tube is closed by a piston of mass $m = 10\ g$ having the same cross-section as the tube, with same area A. The piston is allowed to move freely along the tube with no friction. The gas is assumed to be an ideal gas with constant heat capacity ratio γ. It is assumed that n the number of mol of gas in the container remains constant during the experiment - negligible leaks around the ball. The outside pressure P_{ext} is assumed to be constant and equal to $10^5 Pa$.

It is assumed that the container and the ball do not allow any heat exchange with the outside. Gas transformations are assumed to be reversible. When the piston is at rest, the volume of gas is $V_o = 10l$, its temperature $T_o = 290K$ and its pressure is P_o. $z(t)$ denotes the vertical abscissa of the center of mass of the piston as e function of time. The inertial frame of reference is chosen such that at rest $z_{rest} = 0$. Changes in these state-variables are assumed to be small as compared to these reference values when the piston moves. The gravitational acceleration g is assumed to be constant and equal to $10\ ms^{-2}$

Q. 14 *The piston is assumed at rest at a given height without any applied action other than from gravity g, external pressure P_{ext} and internal pressure P_o. Give P_o as a function of P_{ext}, m, g, A and P_o (NB it is assumed that the mass density of the piston is much greater that the mass density of air). Conclude that, given the numerical values, $P_o \approx P_{ext}$.*

Q. 15 *Assuming an adiabatic reversible transform, express P as a function of V, V_o and P_o and find:*

$$\left.\frac{dP}{dV}\right|_{S,n}$$

as a function of γ, P and V.

Q. 16 *Assuming that z is much smaller than V_o/A show that the net force $\vec{F}$ applied on the piston reads:*

$$\vec{F} = -kz\vec{e_z} \qquad with \qquad k = \gamma A^2 \frac{P}{V} \approx \gamma A^2 \frac{P_{ext}}{V_o}$$

Q. 17 *Write the second Newton's Law of motion for the piston and deduce the ordinary differential equation satisfied by* $z(t)$.

Q. 18 *At* $t = 0$, *the piston at* z_{est} *is given an initial upward vertical velocity* $v_o = 0.2\ m/s$. *Give* z *as a function of time* t, *initial velocity* v_o *and a circular frequency* ω_o *to be given as a function of* k *and* m.

Q. 19 *Assuming that the piston oscillates with a period* T_o, *give* γ *as a function of* T_o *and the other parameters.*

In the experiment we measure $\mathrm{T}_o = 1.70 \pm 0.02\ s$. *What is the maximum amplitude reached by* z, $\Delta\mathrm{V}$ *and* $\Delta\mathrm{P}$. *Conclude on the obtained value for* γ *and its accuracy.*

We want to confirm the obtained value using acoustic waves. It is recall that c_o the speed of acoustic waves is given by:

$$c_o^{-2} = \left.\frac{d\rho}{d\mathrm{P}}\right|_{\mathrm{S},n}$$

Q. 20 *For an ideal gas, show that:* c_o *only depends on* γ, *the molar-mass* $m_n = 29\ \mathrm{g/mol}$, *the temperature* $\mathrm{T} = 290\mathrm{K}$ *and the ideal gas constant* $\mathrm{R} = 8.3\ \mathrm{J.mol^{-1}.K^{-1}}$. *What is the expected value of* c_o *for the value of* γ *measured in the Ruchardt's experiment ?*

We use a tube of length L *with two open ends, to confirm the value obtained for* γ. *What is the expected first frequency giving rise to harmonic standing pressure waves ?*