



## Épreuve écrite de Physique

2 heures

**Chacun des exercices sera rédigé sur une copie différente. Chacune des copies fera impérativement apparaître le numéro de candidat. Les quatre copies devront être rendues même si un ou plusieurs exercices n'ont pas été traités.**

**Les calculatrices sont interdites.**

### 1 Reboucher une bouteille de champagne

On considère une bouteille de champagne fermée par un piston diathermane (qui laisse passer la chaleur) de surface  $S = 2,5 \text{ cm}^2$  et de masse  $m = 10 \text{ g}$  ; initialement bloqué et inséré dans un tube prolongeant le goulot de la bouteille. Pour simplifier les calculs, on considèrera que la bouteille renferme un litre de champagne ainsi qu'un volume  $V_1 = 5 \text{ cm}^3$  de gaz que l'on suppose être uniquement composé de  $\text{CO}_2$ . On considèrera le  $\text{CO}_2$  comme un gaz parfait avec  $\gamma = C_p/C_v = 7/5$  constant. On rappelle que :  $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}R$ .

La bouteille est placée dans un frigo à la température  $T_1 = 4^\circ\text{C}$ . L'état initial du gaz est donc  $E_1 = (T_1, P_1, V_1)$ . Après fermentation, la concentration en  $\text{CO}_2$  dissout dans le champagne est  $c_{\text{CO}_2}$ . On prendra :  $c_{\text{CO}_2} = 10 \text{ g.L}^{-1}$  dans le champagne à  $T_1$  et  $P_1$ ,  $c_{\text{CO}_2} = 3 \text{ g.L}^{-1}$  à  $T_1$  et sous 1 atmosphère ( $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ),  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$  (on prendra  $R.T_1 = 2302 \text{ J.mol}^{-1}$ ).

La loi de Henry donne la pression d'un gaz en fonction de sa fraction molaire dissoute. Cette loi est valide si la fraction molaire du gaz dissout est inférieure à 3% et s'écrit :  $P = H.c_{\text{CO}_2}$  avec  $P$  la pression,  $c_{\text{CO}_2}$  la concentration de gaz dissout et  $H = 0,4 \text{ bar.g}^{-1}.\text{L}$ , le coefficient de Henry.

On libère brusquement le piston. On négligera les frottements du piston le long du tube.

Dans un premier temps, on considère que la détente est suffisamment rapide pour que les échanges de chaleur soient négligeables, et également que le  $\text{CO}_2$  dissout n'a pas le temps de repasser en phase gazeuse. On note  $V_2$  et  $T_2$  le volume et la température du gaz dans ce nouvel état atteint grâce à des phénomènes dissipatifs internes.

**Q. 1.1** Déterminer le travail fourni par les forces extérieures.

**Q. 1.2** Déterminer l'expression de  $V_2/V_1$  et  $T_2/T_1$  uniquement en fonction de  $P_0$  et  $P_1$  et  $\gamma$ .

**Q. 1.3** L'estimer numériquement, on donne  $(22/7)^{7/5} = 5$  et  $\ln(1,25) = 0,2$  ainsi que  $(11/4)^{7/5} = 0,71$  et  $\ln(1,4) = 0,34$ .

Dans un second temps de la chaleur a pu s'échanger avec l'extérieur.

**Q. 1.4** Montrer que la variation d'entropie entre ces deux états est  $\Delta_{1 \rightarrow 2} S = n \cdot C_v \cdot \ln\left(\frac{P_2 \cdot V_2^\gamma}{P_1 \cdot V_1^\gamma}\right)$ .

**Q. 1.5** L'estimer numériquement, on donne  $(22/7)^{7/5} = 5$  et  $\ln(1,25) = 0,2$  ainsi que  $(11/4)^{7/5} = 0,71$  et  $\ln(1,4) = 0,34$ .

**Q. 1.6** La transformation est-elle réversible ? Justifier en utilisant un bilan.

On laisse le gaz se thermaliser et ainsi retrouver la température  $T_1$ . On redescend ensuite infiniment lentement le piston jusqu'à sa position initiale, correspondant à l'état  $E'_1 = (T'_1, P'_1, V'_1)$ .

**Q. 1.7** Est-il possible que cet état puisse être identique à  $E_1$  ?

**Q. 1.8** Déterminer les caractéristiques  $T'_1, P'_1, V'_1$  de cet état  $E'_1$ .

## 2 Modèle le Kronig-Penney

On modélise un cristal unidimensionnel par un potentiel périodique  $V(x)$  tel qu'illustré sur la Figure 1.

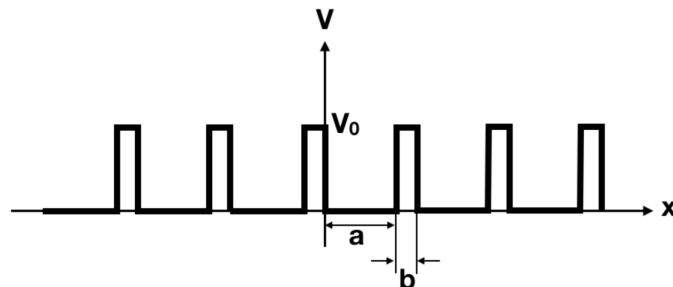


Figure 1: Profil du potentiel.

On s'intéresse à un électron, d'énergie  $E < V_0$  et de masse  $m$  astreint à se déplacer dans ce potentiel.

**Q. 2.1** Donner la forme générale de la partie spatiale des fonctions d'onde  $\phi_1(x)$  solutions pour  $0 \leq x \leq a$ .

On notera  $\alpha = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot E}{\hbar^2}}$ .

**Q. 2.2** Donner la forme générale de la partie spatiale des fonctions d'onde  $\phi_2(x)$  solutions pour  $a \leq x \leq a + b$ . On notera  $\beta = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot (V_0 - E)}{\hbar^2}}$ .

**Q. 2.3** Donner les conditions de continuité en  $x = 0$  et  $x = a$ .

Les fonctions d'onde décrivant les solutions pour tout  $x$  s'écrivent:  $\phi(x) = u_k(x) e^{ik \cdot x}$  avec  $k$  un vecteur d'onde et  $u_k(x)$  une fonction ayant la périodicité du potentiel, c'est-à-dire  $u_k(x + a + b) = u_k(x)$ .

**Q. 2.4** Écrire  $\phi(x + a + b)$  en fonction de  $\phi(x)$  et la dérivée de  $\phi(x + a + b)$  en fonction de celle de  $\phi(x)$ .

**Q. 2.5** Appliquer les relations précédentes en  $x = -b$  en faisant apparaître  $u_k$  et sa dérivée  $u'_k$ .

**Q. 2.6** Écrire  $\phi_1(x)$  et  $\phi_2(x)$  sous la forme  $u_k(x) \cdot e^{ik \cdot x}$ .

**Q. 2.7** Ré-écrire les relations établies en 2.5 avec les expressions de  $u_k$  établies en 2.6.

On simplifie le problème en considérant le cas limite suivant :  $b \rightarrow 0$ ,  $V_0 \rightarrow \infty$ ,  $V_0 \cdot b$  reste constant. On admettra que les solutions de 2.7 s'écrivent:  $\cos(k \cdot a) = \cos(\alpha a) + P \frac{\sin(\alpha a)}{\alpha a}$ .

**Q. 2.8** Donner l'expression de l'énergie cinétique en fonction du vecteur d'onde  $k$  pour un électron lorsque  $V_0 = 0$ .

**Q. 2.9** Quelle remarque peut être faite sur l'énergie d'un électron dans un tel potentiel ?

### 3 Modélisation d'une corde de guitare

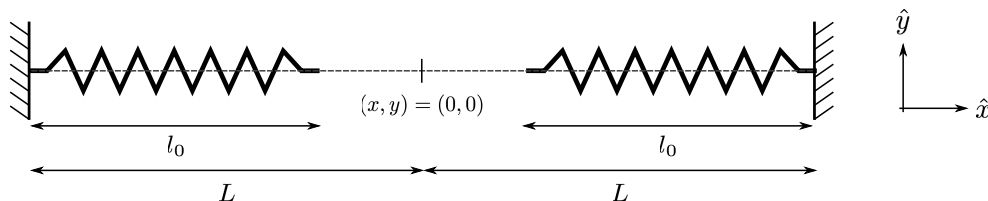


Figure 2: Ressorts à vide.

On modélise une corde de guitare, par une masse ponctuelle  $m$  égale à la masse totale de la corde, retenue par deux ressorts de même raideur  $k$  et de même longueur à vide  $l_0 = 49$  cm (Figure 2). L'axe  $\hat{x}$  est celui du manche, supposé parallèle au sol. On définit l'axe  $\hat{y}$  selon la verticale. La longueur totale de la corde à l'équilibre est  $2 \times L = 1$  m avec  $L > l_0$  (Figure 3).

**Q. 3.1** Au repos, le fait de tendre un ressort de  $l_0$  jusqu'à  $L$  créé une force équivalente au poids d'une masse  $M = 10$  kg. Déterminer la constante de raideur  $k$ .

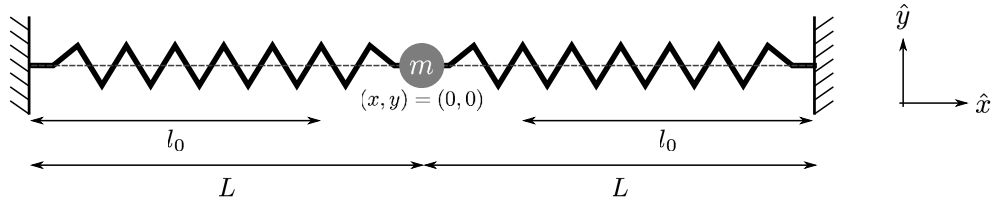


Figure 3: Ressorts en tension.

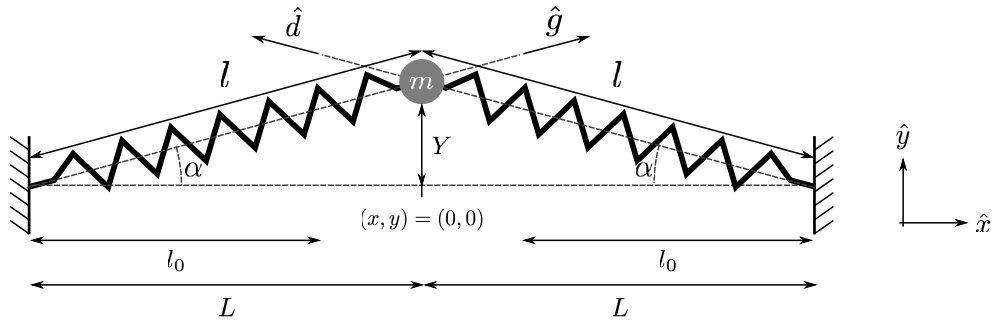


Figure 4: Excitation du système.

On met la corde en mouvement en imposant un déplacement initial  $Y$  à la masse  $m$  selon la verticale, on note  $l$  la longueur totale de chacun des ressorts, et  $\alpha$  l'angle formé entre les ressorts et l'horizontale (Figure 4). On notera  $\Delta l = l - l_0$ .

**Q. 3.2** Donner l'expression forces  $\vec{F}_g$  et  $\vec{F}_d$  selon chacun des vecteurs unitaires  $\hat{g}$  et  $\hat{d}$ .

**Q. 3.3** Appliquer le principe fondamental de la dynamique et décrire le mouvement de  $m$  selon l'axe  $\hat{x}$ .

**Q. 3.4** Appliquer le principe fondamental de la dynamique selon l'axe  $\hat{y}$  et donner l'expression de  $\ddot{y}$ .

**Q. 3.5** Montrer que  $\frac{\Delta l}{l} = 1 - \frac{l_0}{\sqrt{L^2 + y^2}}$ .

**Q. 3.6** On souhaite se placer dans l'approximation des petits angles. Donner une condition, que l'on évaluera numériquement, sur  $Y$  pour que cette approximation soit valable. Commenter la plausibilité de cette situation.

**Q. 3.7** La masse linéique de la corde est  $\mu = 4 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}$ . En déduire que le poids de la corde est négligeable dans l'équation du mouvement.

**Q. 3.8** Montrer qu'avec ces deux approximations on aboutit à l'équation :  $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$ . On précisera  $\omega_0$ .

**Q. 3.9** Donner une valeur numérique pour la pulsation  $\omega_0$  et la fréquence  $\nu_0$ .

## 4 Voile de nuit

Lorsque de nuit, on observe la lumière d'un réverbère à travers un voilage léger, plutôt que d'observer une tache circulaire, on observe une série de points répartis selon une croix. Afin de simplifier la modélisation de la scène représentée sur la gauche de la figure 5, on se place en une dimension, on supposera que le voilage est fait de fils opaques espacés d'une distance  $d$  (voir figure 5, droite). On suppose que le réverbère et l'observateur sont placés à une distance suffisamment grande du voilage, chacun de leur côté, pour pouvoir considérer que tous les rayons viennent avec le même angle.

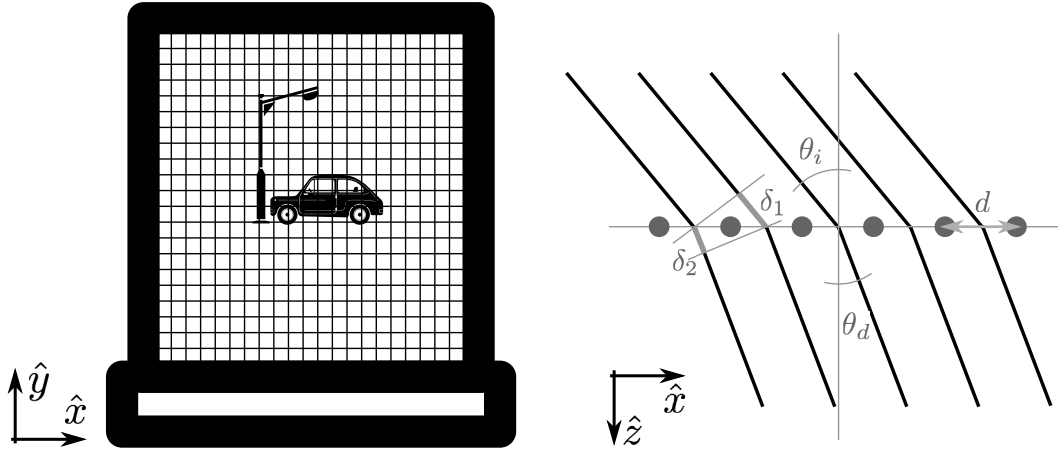


Figure 5: Gauche : scène observée. Droite : modélisation en une dimension du trajet des rayons lumineux à travers le voilage.

On appelle  $\theta_i$  l'angle avec lequel les rayons du réverbère arrivent sur le voilage, et  $\theta_d$  celui avec lequel ils sont diffractés vers l'observateur. On suppose que l'éclairage a une longueur d'onde  $\lambda$ .

**Q. 4.1** Exprimer les différences de chemins optiques  $\delta_1$  et  $\delta_2$  entre deux rayons passant entre deux fils successifs, en fonction de  $\theta_i$ ,  $\theta_d$ ,  $d$ .

**Q. 4.2** En déduire le déphasage entre ces deux rayons et donner une condition pour qu'ils interfèrent constructivement à l'infini. Démontrer ainsi la formule des réseaux :  $\sin \theta_d = \sin \theta_i + p \frac{\lambda}{d}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ .

On suppose que le réverbère et l'observateur sont alignés selon un axe orthogonal au voilage (l'axe  $\hat{z}$  en l'occurrence), de telle façon que les rayons issus du réverbère arrivent à incidence normale sur le voilage. Cette condition, ajoutée à celle des grandes distances permet de faire l'approximation des petits angles.

**Q. 4.3** Montrer que cela conduit à des angles  $\theta_d^p$  pour lesquels se forment des taches lorsque les rayons interfèrent constructivement, tels que  $\theta_d^p = p \frac{\lambda}{d}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ .

La taille finie de la source fait que l'on observe seulement cinq taches, autrement dit  $p \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ .

On modélise l'œil de l'observateur par une lentille simple (correspondant à la cornée) de distance focale  $f = 2 \text{ cm}$ , permettant de former une image sur la rétine placée à son foyer (Figure 6). L'approximation des petits angles permet de considérer que la rétine est plane.

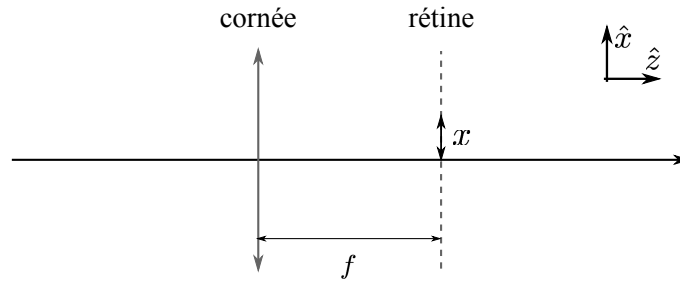


Figure 6: Schéma de l'œil.

**Q. 4.4** Calculer les abscisses  $x_p$  où se forment les taches sur la rétine.

La connaissance d'une des valeurs de  $x^p$ , c'est-à-dire de l'un des angles  $\theta_d^p$ , permettrait de remonter à la distance  $d$  entre les fils du voilage. Cependant, dans la réalité, il est difficile de mesurer des distances sur une rétine. Il faut procéder par comparaison. Pour cela, une voiture de longueur  $l = 2,4 \text{ m}$  se trouve opportunément sous le réverbère et centrée sur lui. L'ensemble est placé à une distance  $L = 20 \text{ m}$  de l'observateur.

L'observateur adapte légèrement sa distance afin que les taches  $p = \pm 2$  se superposent à l'image des extrémités de la voiture. On suppose un réverbère classique fonctionnant avec une lampe à sodium de longueur d'onde  $\lambda = 600 \text{ nm}$ .

**Q. 4.5** Donner une valeur numérique de  $\theta_2$  et en déduire la distance entre les fils du voilage  $d$ .

On tente de reproduire la même expérience le lendemain. Cependant, la lampe à sodium a été remplacée par une diode électroluminescente (LED) blanche émettant de  $\lambda_{\min.} = 400 \text{ nm}$  à  $\lambda_{\max.} = 800 \text{ nm}$ .

**Q. 4.6** Estimer les angles  $\theta_d^p|_{\min.}$  et  $\theta_d^p|_{\max.}$  pour  $p = 1$  et 2 et conclure.



## Épreuve écrite de Physique

2 heures

Chacun des exercices sera rédigé sur une copie différente. Chacune des copies fera impérativement apparaître le numéro de candidat. Les deux copies devront être rendues même si un seul exercice a été traité.

Les calculatrices sont interdites.

Les réponses devront être justifiées.

### 1 Mirage électrocalorique

L'effet électrocalorique décrit le changement de température induit par l'application d'un champ électrique sur un milieu polarisable.

On donne l'expression de la capacité calorifique par unité de volume à champ électrique  $E$  constant :

$$c_E(T) = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_E.$$

#### Effet électrocalorique

On considère l'énergie libre électrique de Gibbs :  $G = U - TS - ED$  à pression constante, avec  $U$  l'énergie interne par unité de volume,  $T$  la température,  $S$  l'entropie,  $E$  le champ électrique,  $D$  le déplacement diélectrique.

On donne l'expression du travail électrostatique par unité de volume:  $dW_E = E \cdot dD$ .

**Q. 1.1** *En utilisant le premier principe de la thermodynamique, écrire le changement d'énergie interne par unité de volume à volume constant.*

**Q. 1.2** *En utilisant le second principe de la thermodynamique, écrire la variation de chaleur  $dQ$  en considérant un processus réversible.*

**Q. 1.3** En déduire l'expression de la dérivée totale  $dG$ .

**Q. 1.4** Exprimer l'entropie et le déplacement diélectrique comme des dérivés partielles de  $G$ , en indiquant les variables thermodynamiques constantes.

**Q. 1.5** Montrer que  $\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E$ .

### Détermination du changement de température induit

**Q. 1.6** Écrire la variation isotherme d'entropie  $\Delta S_T$  comme une intégrale lorsque le champ électrique augmente de  $E_1$  à  $E_2$ .

**Q. 1.7** Écrire la variation d'entropie à champ électrique constant ( $\Delta S_E$ ) lorsque la température varie de  $T_1$  à  $T_2$ . On considèrera que  $c_E$  ne varie pas avec la température.

**Q. 1.8** Simplifier l'expression précédente si  $\Delta T = T_2 - T_1 \ll T_1$ .

**Q. 1.9** Pour un processus adiabatique, montrer que  $\Delta T \approx -\frac{T_1}{c_E} \int_{E_1}^{E_2} \left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E dE$ .

### Variation d'indice optique

La loi de Gladstone relie l'indice optique  $n$  (réel) à la masse volumique ( $\rho$ ) via  $n - 1 = \kappa \rho$  avec  $\kappa$  une constante.

**Q. 1.10** Montrer que la variation d'indice optique  $\Delta n$  d'un gaz parfait lors d'un changement de pression ( $\Delta P = P - P_0$ ) et de température ( $\Delta T = T - T_0$ ) s'écrit  $\Delta n = \gamma \frac{1}{T_0} \left( \Delta P - \frac{P_0}{T_0} \Delta T \right)$  avec  $\gamma$  une constante. Exprimer  $\gamma$  en fonction de  $\kappa$ , de la masse molaire  $M$  du gaz et de la constante des gaz parfaits ( $R$ ).

On prendra  $\gamma \approx 0,081 \text{ K.N}^{-1}.\text{m}^2$  dans la suite.

### Boîte à mirage

On considère le montage représenté sur la Figure 1: une boîte ouverte contenant de l'air considéré comme un gaz parfait. En bas de cette boîte, deux électrodes permettent d'appliquer un champ électrique qui amène la température à  $T = T_0 + \Delta T$  pour  $z \geq h$ . À la surface de cette boîte ( $z = 0$ ), la température est  $T_0 = 300 \text{ K}$ .



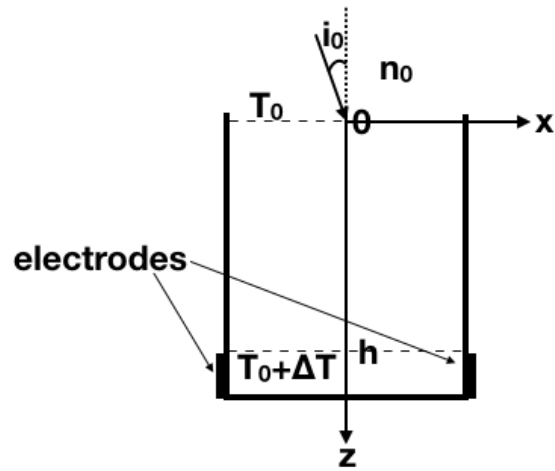


Figure 1: Montage considéré.

On ne prend en compte que la conduction comme mécanisme de transfert de chaleur. La conductivité thermique de l'air,  $\lambda$ , est prise constante.

L'équation de la chaleur, sous forme unidimensionnelle et sans production volumique de chaleur, s'écrit:  $\lambda \frac{d^2 T}{dz^2} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$  avec  $\rho$  la masse volumique,  $C_p$  la capacité calorifique, et  $t$  le temps.

**Q. 1.11** En régime permanent, déterminer l'expression de la température en fonction de la profondeur de la boîte ( $0 \leq z \leq h$ ).

**Q. 1.12** Montrer que la variation de l'indice optique avec la profondeur,  $n(z)$ , s'écrit  $n(z) = n_0 - \alpha z$  avec  $\alpha$  une constante à exprimer en fonction de  $\gamma$ ,  $P_0$ ,  $T_0$ ,  $\Delta T$ ,  $h$ .

Un rayon lumineux monochromatique est envoyé avec une incidence  $i_0$  ( $0 < i_0 < \pi/2$ ) par rapport à l'axe  $z$ . L'indice variant avec la profondeur de la boîte, la déviation  $dx$  subit par le rayon sur une profondeur  $dz$  sera fonction de l'indice optique à cette profondeur. L'angle d'incidence varie donc en fonction de la profondeur et il sera noté  $i(z)$ .

**Q. 1.13** Quelle est la relation entre  $dx$ ,  $dz$  et  $\tan(i(z))$  ?

**Q. 1.14** Montrer que  $\frac{dz}{dx} = \sqrt{\frac{n^2(z)}{n_0^2 \sin^2(i_0)} - 1}$ .

On considère que  $i_0$  est tel que  $n(z) \gg n_0 \sin(i_0)$  pour tout  $z$ .

**Q. 1.15** Simplifiez l'expression précédente avec cette condition.

**Q. 1.16** Estimez les valeurs de  $\Delta T$  compatibles avec cette condition. Sont-elles compatibles l'approximation faite dans la question (Q. 1.8) de l'effet électrocalorique ?

**Q. 1.17** En déduire la déflexion du rayon lumineux en fonction de la profondeur  $z$  dans la boîte et de  $\alpha$ .

Sans champ appliqué, on dessine au fond de la boîte une série de lignes parallèles à  $y$  et équidistantes.

**Q. 1.18** Comment change l'image de ces lignes lorsqu'on applique le champ et que l'équilibre thermique est atteint ?

## 2 Étude de la molécule CO

Cet exercice ne nécessite pas de pré-requis sur la traitement quantique de l'oscillateur harmonique.

Les enjeux sanitaires et environnementaux de la molécule monoxyde de carbone, CO, sont bien connus de nos jours. L'objectif de cet exercice est de décrire la dynamique de cette molécule et de déterminer quelques caractéristiques spectroscopiques à l'aide de modèles physiques simples. La méthodologie utilisée ici est à la base de nombreuses applications telles que le contrôle qualité dans l'industrie agroalimentaire ou la surveillance du climat de la terre.

On se place dans le référentiel du centre de masse de la molécule dans un repère centré au point O. On s'intéresse au mouvement de la particule fictive située au point M, repéré par  $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ , de masse  $\mu$ , correspondant à la masse réduite de la molécule :  $\mu = \frac{m_C m_O}{m_C + m_O}$ . Son énergie potentielle peut être modélisée par le potentiel de Morse :

$$V(r) = D [1 - e^{-\alpha(r-r_0)}]^2, \quad (1)$$

où  $D$ ,  $\alpha$  et  $r_0$  sont des constantes positives qui s'expriment en eV,  $\text{Å}^{-1}$  et  $\text{Å}$ , respectivement.

La gravité est complètement négligeable dans la description du mouvement.

### Partie 1 : approche classique

**Q. 2.1** Déterminer la position d'équilibre et justifier si elle est stable ou non.

**Q. 2.2** Tracer qualitativement l'allure de  $V(r)$ . Quelle est la différence entre les états d'énergie  $E > D$  et ceux d'énergie  $E < D$  ?

On se place dans l'approximation harmonique, c'est-à-dire que l'on suppose que des petits déplacements de  $M$ , autrement dit :  $|r - r_0| \ll r_0$ .

**Q. 2.3** Dans cette approximation, donner une expression approchée de  $V(r)$ , en fonction des dérivées premières et secondes de  $V(r)$ .

**Q. 2.4** Conclure que dans cette approximation le potentiel prend la forme d'un potentiel élastique :  $V(r) = \frac{1}{2}K(r - r_0)^2$  et établir la relation entre la constante de raideur  $K$  et les constantes de Morse.

Proche de sa position d'équilibre on peut donc considérer que la masse réduite est soumise à une force de rappel d'un ressort qui aurait une raideur  $K$ .

**Q. 2.5** Donner l'équation du mouvement du point  $M$ .

On pose  $x(t) = r(t) - r_0$ .

**Q. 2.6** Donner la forme générale de  $x(t)$  puis de l'expression  $r(t)$  et  $\dot{r}(t)$  pour  $\dot{r}(t=0) = 0$  et  $r(t=0) = r_m + r_0$ . En déduire l'énergie mécanique du système.

On peut modéliser l'émission d'un rayonnement électromagnétique par la molécule en ajoutant un terme de frottement  $f = -\gamma\dot{r}$  dans l'équation de la dynamique du point  $M$ . On se place dans la suite dans un régime de faible frottement, c'est-à-dire :  $K > \frac{\gamma^2}{4m}$ .

**Q. 2.7** Donner les solutions générales  $r(t)$  et  $\dot{r}(t)$  pour  $r(t=0) = r_m + r_0$  et  $\dot{r}(t=0) = 0$ . Comme précédemment on pourra utiliser le changement de variable  $x(t) = r(t) - r_0$ .

**Q. 2.8** Comparer l'énergie mécanique obtenue à celle de la question 2.6.

## Partie 2 : approche quantique

Dans l'approximation harmonique, le hamiltonien de la molécule, dans son centre de masse, s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2\hat{x}^2 \quad (2)$$

où  $\omega = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$  (la coordonnée  $x$  est l'équivalente de  $r - r_0$  de la partie précédente). On note  $\{|n\rangle\}$  la base propre de  $\hat{H}$  telle que  $\hat{H}|n\rangle = \epsilon_n|n\rangle$  avec  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ . On introduit les opérateurs adimensionnés  $\hat{X} =$

$\hat{x}\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}$  et  $\hat{P} = \hat{p}\sqrt{\frac{1}{\mu\hbar\omega}}$  ainsi que les opérateurs *annihilation* :  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} + i\hat{P})$ , *création* :  $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{X} - i\hat{P})$  et *nombre de quanta de vibration* :  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . On définit enfin les actions de ces opérateurs sur un état propre de  $\hat{H}$ :

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \quad \text{et} \quad \hat{N}|n\rangle = n|n\rangle, \quad (3)$$

avec la relation de commutation  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ . On donne la constante de Planck  $\hbar = \frac{h}{2\pi} \simeq 10^{-34}$  J.s et la vitesse de lumière dans le vide  $c \simeq 3 \times 10^8$  m/s.

**Q. 2.9** Exprimer  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  en fonction des opérateurs  $\hat{a}$  et  $\hat{a}^\dagger$ .

**Q. 2.10** Montrer que  $\hat{H} = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^\dagger + a^\dagger a)$  et finalement que  $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{N} + \frac{1}{2})$ . En déduire les énergies propres de  $\hat{H}$ .

**Q. 2.11** Rappeler l'action des opérateurs  $\hat{x}$  et  $\hat{p}$  sur une fonction d'onde  $\psi(x)$ .

**Q. 2.12** Sachant que  $\hat{a}|0\rangle = 0$ , montrer que l'on a l'équation différentielle  $(X + \frac{\partial}{\partial X})\psi_0(X) = 0$  où  $\psi_0(X)$  est la fonction d'onde associée au ket  $|0\rangle$ .

**Q. 2.13** Montrer que la solution de l'équation différentielle obtenue à la question précédente est de la forme  $Ce^{-\frac{x^2}{2}}$ . En déduire la fonction d'onde de l'état fondamental de la molécule  $\psi_0(x)$ .

**Q. 2.14** Donner la condition que doit satisfaire la fonction d'onde  $\psi_0(x)$ . En déduire sa forme générale et tracer son allure. On donne :  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-bx^2} = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$ .

**Q. 2.15** En utilisant les propriétés de symétrie de la fonction d'onde, donner la moyenne de la position  $\langle \hat{x} \rangle_0$  dans l'état fondamental et comparer au résultat de la question 2.1.

**Q. 2.16** Donner la moyenne de l'impulsion  $\langle \hat{p} \rangle_0$  en utilisant les propriétés de symétrie de la fonction d'onde. Expliquer le résultat obtenu.

La transition vibrationnelle de l'état fondamental  $n = 0$  vers l'état excité  $n = 1$  se traduit par l'absorption d'un photon infrarouge. Les mesures montrent que cette absorption a lieu pour des photons ayant un nombre d'onde  $\bar{\nu} = 2170 \text{ cm}^{-1}$ , le nombre d'onde étant défini comme  $\bar{\nu} = \frac{1}{\lambda}$  avec  $\lambda$  la longueur d'onde.

**Q. 2.17** Déterminer la valeur de  $\omega$ .