Juin 2018

Épreuve écrite de Mathématiques

2 heures

Les documents et calculatrices sont interdits.

La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.

Exercice 1

Q. 1.1 Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

Q. 1.2 Calculer la valeur de l'intégrale I.

Exercice 2

Soit P un polynôme à coefficients réels, $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P a toutes ses racines réelles. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $P' + \alpha P$ a également toutes ses racines réelles.

Q. 2.1 Supposons tout d'abord P à racines simples. Montrer que $P' + \alpha P$, où P' est le polynôme dérivé de P, est également à racines simples réelles.

Q. 2.2 On ne suppose plus P à racines simples. Montrer que toutes les racines réelles de $P' + \alpha P$ sont réelles.

Exercice 3

Q. 3.1 Déterminer le rayon de convergence R de la série $\sum \frac{n^n}{n!} z^n$.

Q. 3.2 Etudier la convergence de la série sur le cercle de centre 0 et de rayon R.

Exercice 4

Q. 4.1 Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1. $f_n : x \mapsto (\sin(x))^n$, $n \in \mathbb{N}$
2. $f_a : x \mapsto |x - a|$, $a \in \mathbb{R}$
3. $f_\alpha : x \mapsto \exp(\alpha x)$, $\alpha \in \mathbb{C}$
4. $(x \mapsto (\sin(x))^n), (x \mapsto (\cos(x))^n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Q. 4.2 Soit $n \geq 1$. Soit $f_i : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$ une famille de fonctions. On pose

$$\begin{aligned} A : \mathbb{C}^n &\longrightarrow \mathscr{M}_\backslash(\mathbb{C}) \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq n} \end{aligned}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction $\det(A)$ pour que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ soit linéairement indépendante.

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit Y définie par

$$Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si X est paire} \\ 0 & \text{si X est impaire} \end{cases}$$

Q. 5.1 Déterminer la loi de Y.

Q. 5.2 Calculer l'espérance de Y.

Q. 5.3 Calculer la variance de Y.