



Épreuve écrite de Mathématiques

Admission voie DUT

2 heures

Les documents et appareils électroniques sont interdits.

La qualité de la rédaction est un élément important pour l'évaluation.

Chaque affirmation doit être justifiée par une démonstration. Les 5 exercices sont indépendants.

Exercice 1

Q. 1.1 Justifier l'existence de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

Q. 1.2 Calculer la valeur de l'intégrale I .

Exercice 2

On définit $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q. 2.1 Pour tout $x \in [0, 1]$, calculer la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On notera cette limite $f(x)$.

Q. 2.2 La fonction f obtenue est-elle continue sur $[0, 1]$?

Soient $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $[0, 1]$ et g une fonction à valeurs réelles définie sur $[0, 1]$ et qui satisfont à la propriété : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N_ε tel que, pour tout n plus grand que N_ε ,

$$\max_{x \in [0, 1]} |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon.$$

Q. 2.3 Montrer que la fonction g est continue.

Q. 2.4 Montrer que la fonction f obtenue en Q. 2.1 est continue sur $[0, a]$, si $0 < a < 1$.

Exercice 3

Q. 3.1 Etudier l'indépendance linéaire des familles suivantes :

1.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. $f_n : x \mapsto (\sin(x))^n, n \in \{1, 2, 3\}$

3. $(x \mapsto (\sin(x))^n), (x \mapsto (\cos(x))^n), n \in \{1, \dots, 4\}$.

Q. 3.2 Soit $f_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, i \in \{1, 2, 3\}$ une famille de fonctions. On pose

$$A : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathcal{M}_3(\mathbb{C}) \\ (x_1, x_2, x_3) \longmapsto (f_i(x_j))_{1 \leq i, j \leq 3}$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction déterminant de A, $\det(A)$, pour que la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq 3}$ soit libre.

Exercice 4

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Q. 4.1 La matrice A est-elle inversible ?

Q. 4.2 Calculer les valeurs propres de A et des vecteurs propres associés.

Q. 4.3 La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 5

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Soit Y définie par

$$Y = \begin{cases} \frac{X}{2} & \text{si X est paire} \\ 0 & \text{si X est impaire} \end{cases}$$

Q. 5.1 Déterminer la loi de Y.

Q. 5.2 Calculer l'espérance et la variance de Y.